UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Exercice

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$.
On veut montrer que le polynôme caractéristique P_f est annulateur : $P_f(f) = 0$.

1) Soit $x \in E$, $x \neq 0$.
Justifier qu'il existe un entier p avec $0 \leq p \leq n-1$ tel que le système $\big(x, f(x), \dots, f^p(x)\big)$ soit libre et que le système $\big(x, f(x), \dots, f^p(x), f^{p+1}(x)\big)$ soit lié.

2) On note $G = \text{Vect}\big(x, f(x), \dots, f^p(x)\big)$ et g la restriction de f à G.
Écrire la matrice de g dans la base $\big(x, f(x), \dots, f^p(x)\big)$.

3) Conclure.

Éléments de solution

1) E étant de dimension n, le système $(x, f(x), \dots, f^n(x))$ est lié car il contient $n+1$ vecteurs. Le système (x) est libre car $x \neq 0$. Nécessairement, il existe $p \in \{0, \dots, n-1\}$ tel que le système $(x, f(x), \dots, f^p(x))$ soit libre et le système $(x, f(x), \dots, f^{p+1}(x))$ soit lié.
Notons que l'entier p dépend de x.

2) Comme $(x, f(x), \dots, f^p(x))$ est un système générateur de G et que c'est un système libre, c'est une base de G.
La famille $(x, f(x), \dots, f^p(x), f^{p+1}(x))$ est liée, donc il existe $(a_0, \dots, a_{p+1}) \in \mathbb{K}^{p+2}$ non tous nuls tels que

$$\sum_{k=0}^{p+1} a_k f^k(x) = 0.$$

Si $a_{p+1} = 0$, alors la famille $(x, f(x), \dots, f^p(x))$ serait liée. On peut donc supposer que $a_{p+1} = -1$ sans restreindre le problème (il suffit de diviser la relation précédente par $-a_{p+1}$ et de garder les mêmes notations pour les coefficients a_k avec $0 \leq k \leq p$).

On introduit alors le polynôme $Q(X) = X^{p+1} - \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et on a $Q(f)(x) = 0$.

Notons e_i le $i$ème vecteur de la base $(x, f(x), \dots, f^p(x))$ de G. On a alors $f(e_i) = f\big(f^{i-1}(e_i)\big) = f^i(e_i) = e_{i+1}$ si $1 \leq i \leq p-1$ et $f(e_p) = f^{p+1}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k f^k(x)$.

On en déduit que la matrice de g dans la base $(x, f(x), \dots, f^p(x))$ est la matrice

$$M_g = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{p-1} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_p \end{pmatrix}$$

On a vu que le polynôme caractéristique de cette matrice est égal à $(-1)^{p+1}Q(X)$.

3) Complétons la base $(x, f(x), \ldots, f^p(x))$ de G en une base $\mathscr{B}$ de E. La matrice de f dans cette base est alors une matrice par blocs :

$$M_f = \begin{pmatrix} M_g & M_1 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix}$$

D'après le calcul d'un déterminant par blocs, le polynôme caractéristique P_f de f et égal au produit des polynômes caractéristiques des matrices M_g et M_2.
On a donc

$$P_f(f) = P_{M_g}(f) \circ P_{M_2}(f) = P_{M_2}(f) \circ P_{M_g}(f) = (-1)^{p+1} P_{M_2}(f) \circ Q(f).$$

Comme $Q(f)(x) = 0$, on en déduit que $P_f(f)(x) = 0$. (Remarquons que le polynôme Q dépend de x, mais pas P_f).
Ceci est vrai pour tout $x \neq 0$; or $P_f(f)$ est un endomorphisme de E donc $P_f(f)(0) = 0$.
On a alors démontré le théorème de Cayley-Hamilton.