UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Exercice

Soit $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^n$. Résoudre le système linéaire

$$(S) \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 = b_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} + x_n = b_{n-1} \\ x_n + x_1 = b_n \end{cases}$$

Éléments de solution

Notons s_i la symétrie $x \mapsto b_i - x$. On a alors

$$(x_1, \ldots, x_n) \text{ solution de } (S) \iff \begin{cases} x_2 = s_1(x_1) \\ \vdots \\ x_n = s_{n-1}(x_{n-1}) \\ x_1 = s_n(x_n) \end{cases}$$

Nécessairement x_1 doit être invariant par l'application $f = s_n \circ s_{n-1} \circ \ldots \circ s_1$.
Si n pair, alors f est la translation de vecteur $b = b_n - b_{n-1} + \cdots + b_2 - b_1$.

- si $b \neq 0$, le système (S) n'a pas de solution
- si $b = 0$, les solutions vérifient

$$\begin{cases} x_2 = b_1 - x_1 \\ x_3 = b_2 - b_1 + x_1 \\ \vdots \\ x_n = b_{n-1} - b_{n-2} + \cdots + b_2 - b_1 - x_1 \end{cases}$$

  L'ensemble des solutions du système (S) est donc l'espace affine de dimension 1 de direction Vect$((1, -1, \ldots, 1, -1))$ passant par le point $(0, b_1, b_2 - b_1, \ldots, b_{n-1} - b_{n-2} + \cdots + b_2 - b_1)$.

Si n est impair, alors f est la symétrie de centre $b = (b_n - b_{n-1} + b_{n-2} + \ldots + b_1)/2$. Il existe alors une unique solution donnée par :

$$\begin{cases} x_1 = b \\ x_2 = b_2 - b \\ \vdots \\ x_n = b_{n-1} - b_{n-2} + \cdots + b_2 - b_1 + b \end{cases}$$