Agrégation interne
UFR MATHÉMATIQUES

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Exercice

1) Déterminant de Vandermonde
Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. Calculer

$$V_n = \text{Dét}\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

2) Déterminant de Cauchy
Soient $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ et $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^n$ tels que, pour tout $1 \leq i \leq n$, $a_i + b_i \neq 0$. Montrer que

$$C_n = \text{Dét}\left(\frac{1}{a_i + b_j}\right)_{1\leq i,j\leq n} = \frac{\displaystyle\prod_{i>j}(a_i - a_j)(b_i - b_j)}{\displaystyle\prod_{1\leq i,j\leq n}(a_i + b_j)}.$$

Éléments de solution

1) Soit $P(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k x^k + x^{n-1}$. Alors, en utilisant les propriétés des déterminants, on a

$$\text{Dét}\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = \text{Dét}\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & P(a_1) \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & P(a_2) \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & P(a_n) \end{pmatrix}$$

Prenons $P(x) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(x - a_i)$. En développant par rapport à la dernière colonne, on en déduit que

$$D_n = P(a_n)D_{n-1} = \prod_{1\leq i\leq n}(a_n - a_i)D_{n-1}$$

et une récurrence peremt alors de conclure que

$$\text{Dét}\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1\leq i<j\leq n}(a_j - a_i).$$

2) On définit une fraction R par

$$R(x) = \frac{(x-a_1)\dots(x-a_{n-1})}{(x+b_1)\dots(x+b_n)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{x+b_k}$$
$$\text{avec } \lambda_k = \frac{(b_k+a_1)\dots(b_k+a_n)}{(b_k-b_1)\dots(b_k-b_{k-1})(b_k-b_{k+1})\dots(b_k-b_n)}.$$

On a donc, en utilisant les propriétés des déterminants (on remplace la dernière colonne par la somme des λ_i fois la $i$ème colonne)

$$C_n = \frac{1}{\lambda_n} \text{ Dét} \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \dots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & R(a_1) \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \dots & \frac{1}{a_n+b_{n-1}} & R(a_n) \end{pmatrix}$$

Comme R s'annule en tout point a_i avec $1 \leq i \leq n-1$, on en déduit que $C_n = \dfrac{1}{\lambda_n} R(a_n) C_{n-1}$.

On peut alors conclure par récurrence.

Remarquer que $C_n(a_i, b_i) = \dfrac{V_n(a_i)V_n(b_i)}{\displaystyle\prod_{1\leq i,j\leq n} (a_i+b_i)}$.