Exercice

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$ et p un projecteur de E. Montrer que u et p commutent si et seulement si $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ sont stables par u.

Éléments de solution

Supposons que u et p commutent, alors, pour tout $x \in \operatorname{Ker} p$, $p(x) = 0$ par définition de $\operatorname{Ker} p$. De plus, $p[u(x)] = u[p(x)]$ car u et p commutent, or $u[p(x)] = u(0) = 0$ car u est un endomorphisme. On en déduit que $\operatorname{Ker} p$ est stable par u. Pour tout $y \in \operatorname{Im} p$, il existe $x \in E$ tel que $y = p(x)$, par définition de $\operatorname{Im} p$. On a, de plus, $u(y) = u[p(x)] = p[u(x)]$ car u et p commutent, donc $u(y) \in \operatorname{Im} p$. On en déduit que $\operatorname{Im} p$ est stable par u.
Réciproquement, supposons que $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ sont stables par u. Comme p est un projecteur, on a $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$. Soit $x \in \operatorname{Ker} p$, alors $u[p(x)] = u(0) = 0$ et $p[u(x)] = 0$ car $\operatorname{Ker} p$ est stable par u. Soit $y \in \operatorname{Im} p$, alors il existe $x \in E$, tel que $y = p(x)$. On a $u[p(y)] = u[p^2(x)] = u[p(x)]$ car p est un projecteur donc $u[p(y)] = u(y)$ et, de plus, $u(y) \in \operatorname{Im} p$ car $\operatorname{Im} p$ est stable par u, donc il existe $x' \in E$, tel que $u(y) = p(x')$, d'où $p[u(y)] = p[p(x')] = p^2(x') = p(x') = u(y)$. On a donc montré que $u \circ p = p \circ u$.