Exercice

Montrer que

$$\forall Q \in \mathbb{R}[X],\ \exists! P \in \mathbb{R}[X], \begin{cases} Q(X) = P(X+1) - P(X) \\ \displaystyle\int_0^1 P(t)\,dt = 0 \end{cases}$$

Éléments de solution

On définit une forme linéaire non nulle par

$$\varphi : \left[\begin{array}{l} \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R} \\ \quad P \mapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)\,dt \end{array} \right.$$

$\operatorname{Ker}\varphi$ est donc un hyperplan de $\mathbb{R}[X]$. Posons $P_0(X) = 1$. Comme $\varphi(P_0) \neq 0$, on a $\mathbb{R}[X] = \operatorname{Ker}\varphi \oplus \mathbb{R}_0[X]$.
Ainsi, résoudre l'exercice revient à établir que l'application linéaire :

$$\Delta : \left[\begin{array}{l} \operatorname{Ker}\varphi \to \mathbb{R}[X] \\ \quad P \mapsto P(X+1) - P(X) \end{array} \right.$$

est bijective.
Montrons que Δ est injective. Soit $P \in \operatorname{Ker}\Delta$, alors $P(X+1) - P(X) = 0$. Comme $P \in \operatorname{Ker}\varphi$, s'il n'est pas nul, P n'est pas un polynôme constant. Donc il admet au moins une racine complexe. Mais, d'après $P(X+1) = P(X)$, il en admettrait une infinité. Absurde donc $P = 0$.
Montrons que Δ est surjective. Pour le montrer, il suffit de vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta(\mathbb{R}_{n+1}[X]) = \mathbb{R}_n[X]$.
Soit $\Delta_n : \mathbb{R}_{n+1}[X] \cap \operatorname{Ker}\varphi \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $\Delta(P) = P(X+1) - P(x)$. $\operatorname{Ker}\Delta = \{0\}$ par injectivité de Δ. Déterminons $\operatorname{Im}\Delta_n$. On a

$$\dim(\operatorname{Im}\Delta_n) = \dim\left(\mathbb{R}_{n+1}[X] \cap \operatorname{Ker}\varphi\right) - \dim(\operatorname{Ker}\Delta_n) = \dim\left(\mathbb{R}_{n+1}[X] \cap \operatorname{Ker}\varphi\right).$$

Soit $P \in \mathbb{R}_{n+1}[X] \cap \operatorname{Ker}\varphi$. On a alors $P(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n+1} a_i X_i$ et $\varphi(P) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n+1} \frac{a_i}{i+1} = 0$. Or l'application de $\mathbb{R}^{n+1}$ dans $\mathbb{R}$ qui, à $(a_0, \ldots, a_n, a_{n+1})$ associe $\displaystyle\sum_{i=0}^{n+1} \frac{a_i}{i+1}$ est une forme linéaire non nulle donc son noyau est de dimension $\dim \mathbb{R}^{n+2} - 1 = (n+2) - 1 = n+1$.
On en déduit que $\dim(\operatorname{Im}\Delta_n) = n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$. Donc $\operatorname{Im}\Delta_n = \mathbb{R}_n[X]$ car $\operatorname{Im}\Delta_n \subset \mathbb{R}_n[X]$. L'application Δ est donc surjective.
On a montré que Δ est bijective, ce qui résout l'exercice.