Exercice

Soient E un plan vectoriel, (i, j) une base de E et (a, b) un couple de réels.
On note $F_{a,b}$ l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base (i, j) est

$$\begin{pmatrix} a & 2(a-1) \\ b & 1+2b \end{pmatrix}$$

Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble $\{F_{a,b}\,;\,(a,b) \in \mathbb{R}^2\}$. Soit $V = -2i + j$.

1-a) Quelle condition nécessaire et suffisante doit vérifier (a, b) pour que $F_{a,b}$ soit bijective ?

b) Montrer que : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ F_{a,b}(V) = V$. Quel est l'ensemble E_1 des éléments de E invariants par $F_{a,b}$?

c) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que, pour qu'il existe $W \in E$, $W \neq 0$, tel que $F_{a,b}(W) = \lambda W$, il faut et il suffit que $\lambda = 1$ ou $\lambda = a + 2b$.
Préciser $E_{a+2b} = \{W \in E\,;\, F_{a,b}(W) = (a+2b)W\}$. Dans quel cas E_1 et E_{a+2b} sont-elles des droites vectorielles ?
Dans quel cas a-t-on alors $E = E_1 \oplus E_{a+2b}$?

d) Montrer que (i, V) est une base de E et écrire la matrice de $F_{a,b}$ dans cette base.

2) Soit Δ la droite vectorielle engendrée par V. On considère les endomorphismes G de E satisfaisant les conditions

$$\begin{array}{ll} (C_1) & G(V) = V \\ (C_2) & \exists \gamma \in \mathbb{R},\ \mathrm{Im}(G - \gamma Id_E) \subset \Delta \end{array}$$

a) Montrer que, pour un endomorphisme H satisfaisant (C_2), le réel γ est unique.

b) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $F_{a,b}$ satisfait (C_1) et (C_2).

c) Réciproquement, soit G un endomorphisme de E satisfaisant (C_1) et (C_2). Montrer que $G \in \mathscr{F}$. (On pourra justifier l'existence d'un réel δ tel que $G(i) = \gamma i + \delta V$ et écrire la matrice de G dans (i, V).)

d) Démontrer, à l'aide des conditions (C_1) et (C_2), que $\mathscr{F}$ est stable pour la composition des applications et que l'ensemble $\mathscr{F}' = \{F_{a,b}\,;\, a + 2b \neq 0\}$ est un groupe pour $\circ$.

Éléments de solution

1-a) $F_{a,b}$ est bijective si et seulement si le déterminant de sa matrice est non nul, i.e. $a(1+2b) - 2b(a-1) = a + 2b \neq 0$.

b) $F_{a,b}(V) = -2F_{a,b}(i) + F_{a,b}(j) = -2(ai + bj) + 2(a-1)i + (1+2b)j = -2i + j = V$.
Un vecteur $v = xi + yj$ de E est invariant par $F_{a,b}$ si et seulement si $F_{a,b}(v) = v$, d'où $xi + yj = x(ai + bj) + y(2(a-1)i + (1+2b)j) = \big(ax + 2(a-1)y\big)i + \big(xb + y(1+2b)\big)j$. (i, j) étant une base, on en déduit que

$$\begin{cases} x = ax + 2(a-1)y \\ y = xb + y(1+2b) \end{cases} \iff \begin{cases} x(1-a) = 2(a-1)y \\ bx = -2by \end{cases}$$

On en déduit que

- si $a \neq 1$ ou $b \neq 0$, E_1 est la droite vectorielle engendrée par V.
- si $a = 1$ et $b = 0$, $E_1 = E$.

c) Pour qu'il existe W, non nul dans E, tel que $F_{a,b}(W) = \lambda W$, il faut et il suffit que l'application $F_{a,b} - \lambda Id_E$ ne soit pas injective. Le déterminant de cette application vaut $(a-\lambda)(1+2b-\lambda) - 2b(a-1) = (\lambda-1)(\lambda-a-2b)$. Il est nul si et seulement si $\lambda - 1$ ou $\lambda = a+2b$. De plus, après calcul, on a $E_{a+2b} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, bx = (a-1)y\}$.
On en déduit que E_{a+2b} est une droite vectorielle si et seulement si $b \neq 0$ ou $a \neq 1$.
D'après ce qui précéde, E_1 est une droite vectorielle si et seulement si $a \neq 1$ ou $b \neq 0$.
Si $a \neq 1$ ou $b \neq 0$, comme $\dim E = \dim E_1 + \dim E_{a+2b}$, E_1 et E_{a+2b} sont en somme directe si et seulement si leur intersection est réduite au vecteur nul. C'est le cas si $V = (-2,1)$ et $(a-1,b) \neq (0,0)$ ne sont pas colinéaires, c'est-à-dire si $a + 2b \neq 1$.

e) i et V forment un système de deux éléments de E non colinéaires, donc ils forment une base de E car $\dim E = 2$.
On a $F_{a,b}(i) = ai + bj = ai + b(V+2i) = (a+2b)i + bV$ et, d'après la question 1)b, $F_{a,b}(V) = V$. On en déduit la matrice de $F_{a,b}$ dans la base (i,V)

$$\mathrm{Mat}(F_{a,b},(i,V)) = \begin{pmatrix} a+2b & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$$

3) Supposons qu'il existe deux réels γ et γ' tels que $\mathrm{Im}(H - \gamma Id_E) \subset \Delta$ et $\mathrm{Im}(H - \gamma Id_E) \subset \Delta$, alors pour tout W de E, $H(W) - \gamma W$ et $H(W) - \gamma' W$ sont colinéaires à V. H étant linéaire, on peut supposer qu'ils sont égaux à V donc égaux pour un certain W non nul. On en déduit que $\gamma W = \gamma' W$, or $W \neq 0$, donc $\gamma = \gamma'$. Il y a donc unicité du réel γ.

a)

$$\mathrm{Mat}(F_{a,b} - (a+2b)Id_E,(i,V)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 1-a-2b \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $\mathrm{Im}(F_{a,b} - (a+2b)Id_E) \subset \Delta$ et $F_{a,b}$ vérifie (C_2) avec $\gamma = a+2b$. (C_1) est vérifiée d'après la question 1)b.

b) D'après (C_2), il existe un réel δ tel que $\big(G - \gamma Id_E\big)(i) = \delta V$, donc $G(i) = \gamma i + \delta V$. De plus, $G(V) = V$. D'où

$$\mathrm{Mat}(G,(i,V)) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ \delta & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $G = F_{\gamma - 2\delta, \delta} \in \mathscr{F}$.

4) Soit G et H deux endomorphismes vérifiant (C_1), alors $G \circ H$ est un endomorphisme et $(G \circ H)(V) = G\big[H(V)\big] = G(V)$ car H vérifie (C_1) et $G(V) = V$ car G vérifie (C_1).
Montrons qu'il existe γ tel que $\mathrm{Im}(G \circ H - \gamma Id_E) \subset V$. Soit γ_1 et γ_2 les réels associés respectivement à G et H par la condition (C_2). D'après (C_2), pour tout vecteur W de E, il existe deux réels α_1 et α_2 tels que $(G - \gamma_1 Id_E)(W) = \alpha_1 V$ et $(H - \gamma_2 Id_E)(W) = \alpha_2 V$.

$$\begin{aligned} G \circ H(W) &= G(\gamma_2 W + \alpha_2 V) \\ &= \gamma_2 G(W) + \alpha_2 V \mathrm{car G est un endomorphisme et G(V) = V} \\ &= \gamma_2(\gamma_1 W + \alpha_1 V) + \alpha_2 V = \gamma_2\gamma_1 W + (\alpha_1\gamma_2 + \alpha_2)V \end{aligned}$$

On en déduit que $\mathrm{Im}(G \circ H - \gamma_1\gamma_2 Id_E) \subset \Delta$ et $G \circ H$ vérifie (C_2).

Montrons que $\mathscr{F}'$ est un sous-groupe de l'ensemble $GL(E)$ des isomorphismes de E. C'est bien un sous-ensemble de $GL(E)$ car $a + 2b \neq 0$ car, d'après 1)a, c'est le sous-ensemble des applications bijectives de $\mathscr{F}$;. Il est stable pour la composition des applications car la composée de deux applications bijectives est bijective et $\mathscr{F}$ est stable pour $\circ$. Il est non vide car Id_E est un de ces éléments.
Soit $G \in \mathscr{F}'$, alors G^{-1} existe, il suffit alors de montrer que $G^{-1} \in \mathscr{F}$. Si $G(V) = V$, alors $G^{-1}(V) = V$, donc G^{-1} vérifie (C_1). D'après (C_2), il existe δ tel que $G(i) = \gamma i + \delta V$, donc, comme G^{-1} est un endomorphisme, $i = \gamma G^{-1}(i) + \delta V$ car $G^{-1}(V) = V$. On a vu que $\gamma = a + 2b \neq 0$, car $G \in \mathscr{F}'$ donc $G^{-1}(i) - (1/\gamma)i \in \Delta$. On avait déjà $G^{-1}(V) \in \Delta$, or (i,V) est une base de E, donc $\mathrm{Im}(G^{-1} - (1/\gamma)Id_E) \subset \Delta$ et G^{-1} vérifie (C_2) avec le réel $1/\gamma$.
On en déduit que $(\mathscr{F}', \circ)$ est un groupe.