Exercice

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$.
Montrer que u est nilpotent si et seulement si, pour tout $1 \leq p \leq n$, $\mathrm{Tr}(u^p) = 0$.

Éléments de solution

Si u est nilpotent, alors toutes ses valeurs propres sont nulles, donc $\mathrm{Tr}(u) = 0$. Soit $1 \leq p \leq n$. Les valeurs propres de u^p sont également nulles donc $\mathrm{Tr}(u^p) = 0$.

Réciproquement, supposons que, pour tout $1 \leq p \leq n$, $\mathrm{Tr}(u^p) = 0$ et que u n'est pas nilpotent.
Soit P_u le polynôme caractéristique de u que l'on écrit sous la forme

$$P_u(X) = (-1)^n X^\alpha (X - \lambda_1)^{\alpha_1} \dots (X - \lambda_r)^{\alpha_r}$$

où les λ_i sont non nuls et deux à deux distincts (P_u est scindé dans $\mathbb{C}[X]$).

Pour tout $1 \leq p \leq n$, on a $\mathrm{Tr}(u^p) = 0$, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \, \lambda_i^p = 0$. Le système suivant admet donc $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ comme solution non nulle (car u est supposé non nilpotent) :

$$\begin{cases} \lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_r X_r = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1^r X_1 + \cdots + \lambda_r^r X_r = 0 \end{cases}$$

On en déduit que le déterminant de ce système est nul, c'est-à-dire que

$$\left(\prod_{i=1}^{r} \lambda_i\right) \prod_{1 \leq i < j \leq r} (\lambda_j - \lambda_i) = 0.$$

On a donc abouti à une contradiction car les λ_i sont non nuls et distincts deux à deux. On en déduit que u est nilpotent.
Ce résultat permet de démontrer le théorème de Brunside : un sous-groupe G de $GL_n(\mathbb{C})$ est fini si et seulement s'il est d'exposant fini.