UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Thème 5 - Applications linéaires

Exercice

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2 et $f \in \mathscr{L}(E)$.

On définit une application φ_f sur $\mathscr{L}(E)$ par $\varphi_f(g) = f \circ g$ pour tout $g \in \mathscr{L}(E)$.

1) On suppose que f est de rang 2. Quel est le rang de φ_f ?

2) Même question si f est de rang 1.

Éléments de solution

φ_f est un endomorphisme d'un espace de dimension 4. Donc rang$(\varphi_f) \leq 4$.

1) f est de rang 2 et E est de dimension 2 donc f est bijective de E dans E.
Donc, pour tout $h \in \mathscr{L}(E)$, il existe $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f \circ g = h$ (en fait $g = f^{-1} \circ h$ convient). L'endomorphisme φ_f est alors surjectif sur un espace de dimension finie. Il est donc bijectif et de rang 4.

2) Soit (e_1, e_2) une base de E. Comme f est de rang 1, les vecteurs $f(e_1)$ et $f(e_2)$ sont liés et ne sont pas tous les deux nuls. Supposons que $f(e_1) \neq 0$ (sinon il suffit d'échanger les deux vecteurs de la base).
Soit $E_1 = \operatorname{Im} f$. On a $\dim E_1 = 1$.
Soit $h \in \operatorname{Im} \varphi_f$. Alors il existe $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $h = f \circ g$.
Donc $\operatorname{Im} h = \operatorname{Im}(f \circ g) \subset \operatorname{Im} f = E_1$.
Comme $\dim E_1 = 1$, un endomorphisme non nul de E ne peut appartenir à $\operatorname{Im} \varphi_f$ que si son image est égale à E_1.
Soit $h \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\operatorname{Im} h = E_1$. On a donc $h(e_1) = af(e_1)$ et $h(e_2) = bf(e_1)$ avec $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.
On définit un endomorphisme g de E par $g(e_1) = ae_1$ et $g(e_2) = be_1$. On a alors $f \circ g = h$.

On a donc montré que l'image de φ_f est l'espace des endomorphismes de E dont l'image est égale à E_1. C'est donc un espace de dimension 2, puisqu'un tel endomorphime est entièrement déterminé par les valeurs de a et b définies plus haut. On en déduit que φ_f est de rang 2.