UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Exercice

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 = Id$.
Montrer qu'il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $f(e_i) = e_i$ ou $f(e_i) = -e_i$.

Éléments de solution

Pour tout $x \in E$, on a
$$x = \frac{1}{2}(x + f(x)) + \frac{1}{2}(x - f(x)).$$
Donc, si on pose $F = \mathrm{Im}(\frac{I+f}{2})$ et $G = \mathrm{Im}(\frac{I-f}{2})$, on a $E = F + G$.
De plus, si $z \in F$, alors il existe $x \in E$ tel que $z = \frac{1}{2}(x + f(x))$.
D'où $f(z) = \frac{1}{2}(f(x) + f^2(x)) = \frac{1}{2}(f(x) + x) = z$.
On montre de même que, si $z \in G$, alors $f(z) = -z$.
On en déduit que $F \cap G = \{0\}$ et donc que $E = F \oplus G$.
Il suffit alors de prendre la réunion d'une base de F et d'une base de G pour obtenir une base de E qui réponde au problème.