UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Exercice

1) Soit s et t deux formes bilinéaires symétriques sur un espace vectoriel E de dimension finie, s étant supposée non dégénérée. Montrer qu'il existe un unique endomorphisme f de E tel que

$$\forall x, y \in E, \quad s\big(f(x), y\big) = t(x, y). \tag{1}$$

Montrer que l'on a

$$\forall x, y \in E, \quad s\big(f(x), y\big) = s\big(x, f(y)\big). \tag{2}$$

2) Montrer que, si $\lambda \neq \mu$, les sous-espaces propres pour f, E_λ et E_μ, sont orthogonaux pour s et en déduire qu'ils le sont aussi pour t.

3) Montrer qu'il existe une base orthogonale à la fois pour s et t si et seulement si f est diagonalisable.

4) Application : Soit

$$\begin{aligned} q_s(x) &= x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_2x_3 \\ q_t(x) &= (1+a)x_1^2 + x_2^2 + (1+a)x_3^2 - 2x_1x_2 - 2(1+a)x_1x_3 + 2x_2x_3 \end{aligned}$$

Pour quelles valeurs de a existe-t-il une base orthogonale à la fois pour q_s et q_t ? Déterminer une telle base, lorsqu'elle existe.

Éléments de solution

1) En notant A, S, T les matrices de f, s, t dans une base $\{e_i\}$: la relation (1) s'écrit $SA = T$. Puisque s est non dégénérée, on a $A = S^{-1}T$. Donc, si f existe, elle est unique car sa matrice est $S^{-1}T$. Réciproquement, en définissant f par $M(f)_{e_i} = S^{-1}T$ et en remontant les calculs, on vérifie (1). La relation (2) vient de la symétrie de s.

2) Ecrire la relation (2) pour $x \in E_\lambda$ et $y \in E_\mu$. Utiliser (1) pour montrer que $t(x, y) = 0$.

3) Supposons f diagonalisable et soit s_λ la restriction de s à E_λ. Dans chaque E_λ, on prend une base orthogonale pour s_λ. Puisque f est diagonalisable, E est somme directe des E_λ et la réunion de ces bases est une base orthogonale pour s de E. D'après le résultat ci-dessus, elle est aussi orthogonale pour t.
Réciproquement, supposons qu'il existe une base orthogonale pour s et t. Dans cette base, avec les notations précédentes, S et T sont diagonales, donc $A = S^{-1}T$ est diagonale.

4) $A = \begin{pmatrix} a & 0 & -a \\ -1 & 1 & 1 \\ a & 0 & -a \end{pmatrix}$. Cette matrice est diagonalisable si et seulement si $a = 0$. Pour avoir une base orthogonale pour s et t, il faut prendre une base de vecteurs propres de A qui est orthogonale pour s. On trouve par exemple

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$