Agrégation interne
UFR MATHÉMATIQUES

Exercice

Soit A une matrice symétrique définie positive.

Montrer qu'il existe une unique matrice triangulaire supérieure P à coefficients diagonaux strictement positifs telle que $A = {}^tPP$.

Éléments de solution

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. La matrice A définit un produit scalaire que l'on note $(\ ,\ )$.

Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ une base orthonormée pour ce produit scalaire et soit P la matrice de passage de la base $(f_1, \ldots, f_n)$ à $(e_1, \ldots, e_n)$ alors :

$$A = {}^tP\, I\, P = {}^tPP.$$

On cherche donc les bases orthonormées telles que la matrice de passage correspondante soit triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs, c'est-à-dire les bases $(f_1, \ldots, f_n)$ telles que, pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$ Vect$(f_1, \ldots, f_k) =$ Vect$(e_1, \ldots, e_k)$ et $(f_k, e_k) > 0$ puisque $e_k = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} (f_p, e_j) f_p$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt assure l'existence et l'unicité d'une telle base.