Agrégation interne
UFR MATHÉMATIQUES

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Exercice

Soit E un espace euclidien et p un projecteur de E. Montrer l'équivalence

$$p \text{ projecteur orthogonal } \iff \forall x \in E,\ \|p(x)\| \leq \|x\|.$$

Éléments de solution

- Supposons que p soit un projecteur orthogonal, alors $E = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p$ et ces deux sous-espaces sont orthogonaux. Soit $x = x_1 + x_2$ avec $x_2 \in \mathrm{Im}\, p$ et $x_1 \in \mathrm{Ker}\, p$, alors $p(x) = x_2$, $\|x\| = \sqrt{\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2}$ et $\|p(x)\| = \|x_2\|$ donc $\|p(x)\| \leq \|x\|$.
- Soit p un projecteur tel que $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leq \|x\|$, alors $E = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Ker}\, p$. Soit $x = x_1 + x_2$ avec $x_2 \in \mathrm{Im}\, p$ et $x_1 \in \mathrm{Ker}\, p$. On a $\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + 2 < x_1, x_2 >$ et $\|p(x)\|^2 = \|x_2\|^2$. On en déduit que $\|x_1\|^2 + 2 < x_1, x_2 > \geq 0$ pour tout $(x_1, x_2) \in E^2$. Soit $e \in \mathrm{Im}\, p$ un vecteur unitaire, et $x = \lambda e$. On obtient en particulier que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $x_2 \in \mathrm{Ker}\, p$, $\lambda^2 + 2\lambda < e, x_2 > \geq 0$; le discriminant de ce polynôme vaut donc 0 et $\mathrm{Ker}\, p$ et $\mathrm{Im}\, p$ sont orthogonaux.