UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Exercice

Soit q la forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^n$ par la matrice M de terme général $m_{ij} = i + j - 1$.
Déterminer une base orthogonale pour q.

Éléments de solution

$$
\begin{aligned}
q(x) = q(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i,j=1}^{n} (i + j - 1) x_i x_j \\
&= \Big(\sum_{i=1}^{n} i x_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j\Big) + \Big(\sum_{j=1}^{n} (j-1) x_j\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big) \\
&= \Big(\sum_{i=1}^{n} (2i-1) x_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j\Big) \\
&= \Big(\sum_{i=1}^{n} i x_i\Big)^2 - \Big(\sum_{i=1}^{n} (i-1) x_i\Big)^2.
\end{aligned}
$$

Les deux formes linéaires sont indépendantes. On pose

$$
\begin{aligned}
x'_1 &= \sum_{i=1}^{n} i x_i \\
x'_2 &= \sum_{i=2}^{n} (i-1) x_i \\
x'_i &= x_i, \ i = 3, \dots, n
\end{aligned}
$$

C'est un changement de base, la matrice est triangulaire inférieure avec des 1 sur la diagonale. On en déduit que

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x'_1 - 2x'_2 - \sum_{i=3}^{n} (i-1) x'_i - \sum_{i=3}^{n} i x'_i \\
x_2 &= x'_2 - \sum_{i=3}^{n} (i-1) x'_i \\
x_i &= x'_i, \ i = 3, \dots, n
\end{aligned}
$$

Une base orthogonale pour q est donc
$e'_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (-2, -2, 0, \dots, 0)$ et $e_i = (-i, i-2, 0, \dots, 0, 1, 0 \dots, 0)$ pour $i = 3, \dots, n$ où le 1 est en i-ème place.