Agrégation interne
UFR MATHÉMATIQUES

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Exercice

Soit $A = (a_{ij})$ la matrice carrée d'ordre n définie par $a_{ij} = \inf(i, j)$.

1) Montrer que A est symétrique et donner l'expression de la forme quadratique q qui lui correspond dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. En utilisant une récurrence sur n, décomposer q en somme de carrés. Quelle est la signature de q ?

2) Donner une base orthogonale pour q. Comparer, pour $n = 3$, avec la base obtenue par le procédé de Gram-Schmidt.

Éléments de solution

1) A est symétrique puisque $\inf(i, j) = \inf(j, i)$. D'après une formule du cours, on a :
$q(x) = \sum_{i=1}^{n} ix_i^2 + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} ix_ix_j$. D'où, en appliquant la méthode de Gauss :

$$\begin{aligned}
q(x) &= x_1^2 + 2\sum_{j=1}^{n} x_1x_j + \sum_{i=2}^{n} ix_i^2 + 2\sum_{2\leq i<j\leq n} ix_ix_j \\
&= (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 - (\sum_{i=2}^{n} x_i)^2 + \sum_{i=2}^{n} ix_i^2 + 2\sum_{2\leq i<j\leq n} ix_ix_j \\
&= (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 - \sum_{i=2}^{n} x_i^2 - 2\sum_{2\leq i<j\leq n} x_ix_j + \sum_{i=2}^{n} ix_i^2 + 2\sum_{2\leq i<j\leq n} ix_ix_j \\
&= (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 + \sum_{i=2}^{n}(i-1)x_i^2 + 2\sum_{2\leq i<j\leq n}(i-1)x_ix_j \\
&= (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 + \sum_{l=1}^{n-1} lx_{1+l}^2 + 2\sum_{1\leq l<m\leq n-1} lx_{1+l}x_{1+m}
\end{aligned}$$

Une récurrence montre alors que
$q(x) = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 + (x_2 + \cdots + x_n)^2 + \cdots + +(x_{n-1} + x_n)^2 + x_n^2$ et q est de signature $(n, 0)$.

2) L'obtention d'une base orthogonale résulte de cette écriture : la matrice de passage P est telle que P^{-1} est triangulaire supérieure et $p_{ij} = 1$ si $i \leq j$.

On a, avec les notations usuelles, $x_i = x'_i - x'_{i+1}$ pour $i = 1, \ldots, n-1$ et $x_n = x'_n$.

On trouve donc la base orthogonale $(1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, -1, 1, 0, \ldots, 0), \ldots (0, \ldots, 0, -1, 1)$.
Si $n = 3$, cela donne $(1, 0, 0), (-1, 1, 0)$ et $(0, -1, 1)$.
En orthonormalisant la base canonique de $\mathbb{R}^3$ par le procédé de Schmidt, on obtient le même résultat.