Exercice

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$ et F un sous-espace vectoriel de E de dimension $p \leq n$.

1) Démontrer que, pour tout x de E, il existe un unique élément y de F tel que $x - y$ soit dans $F^{\perp}$. On pose $P_F(x) = y$. P_F est la projection orthogonale de E sur F.

2-a) Démontrer que : $\forall x \in E, \forall z \in F,\ \|x - z\| \geq \|x - P_F(x)\|$.
$\|x - P_F(x)\|$ est la distance de x à F.

b) Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, déterminer la distance de $a = (a_1, a_2, a_3)$ au plan Q d'équation $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0$ où $b = (b_1, b_2, b_3)$ est donné dans $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

3) Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base orthogonale de F. Démontrer que

$$\forall x \in E,\ P_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \frac{<x, e_i>}{<e_i, e_i>} e_i.$$

Que devient cette expression si la base est orthonormale ?

Éléments de solution

1) F est un sous-espace vectoriel de E, espace euclidien, son orthogonal est donc un supplémentaire de F et $E = F \oplus F^{\perp}$. Pour tout $x \in E$, il existe un unique $y \in F^{\perp}$ et un unique $y' \in F$ tels que $x = y + y'$.

2-a) D'après le théorème de Pythagore,
$\forall z \in F, \forall x \in E, \|x - z\|^2 = \|x - P_f(x)\|^2 + \|P_F(x) - z\|^2$ car $x - P_f(x)$ et $P_F(x) - z$ sont orthogonaux. On en déduit le résultat.

b) Q est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2. Son orthogonal est de dimension 1 et de base b. De plus $a' = a - \dfrac{<a, b>}{<b, b>} b$ est orthogonal à b et donc a' appartient à $(Q^{\perp})^{\perp} = Q$. Ainsi $a = a' + \dfrac{<a, b>}{<b, b>} b$ est la décomposition de a sur Q et $Q^{\perp}$ et l'on a $P_Q(a) = a'$. La distance de a à Q est donc

$$\|a - a'\| = \|\frac{<a, b>}{<b, b>} b\| = \frac{|<a, b>|}{\|b\|} = \frac{|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3|}{\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

3) Pour tout $x \in E, S(x) = \sum_{i=1}^{p} \dfrac{<x, e_i>}{<e_i, e_i>} e_i$ est un élément de F. Pour montrer que $S(x) = P_F(x)$, il suffit de montrer que $x - S(x)$ est dans $F^{\perp}$.

$$\begin{aligned}
\forall j \in \{1, \ldots, p\} \quad <(x - S(x), e_j> &= <x, e_j> - <S(x), e_j> \\
&= <x, e_j> - \sum_{i=1}^{p} \frac{<x, e_i>}{<e_i, e_i>} <e_i, e_j> \\
&= <x, e_j> - <x, e_j> = 0
\end{aligned}$$

Lorsque la base est orthonormale, on a $P_F(x) = \sum_{i=1}^{p} <x, e_i> e_i$.