Exercice

Soit q une forme quadratique sur un K-espace vectoriel E de forme polaire b.
On dit qu'un endomorphisme u de E conserve q si :

$$\forall x \in E, q\,(u(x)) = q(x).$$

On dit de même que u conserve b si :

$$\forall x, y \in E, b\,(u(x), u(y)) = b(x, y).$$

1) Montrer que : u conserve $b \Longleftrightarrow u$ conserve q.

2) Soit $O(q) = \{u \in GL(E), u \text{ conserve } q\}$. Montrer que $O(q)$ est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$. $O(q)$ est appelé le groupe orthogonal de q.

3) On suppose E de dimension finie et q non dégénérée.
Montrer que : $\forall\, u \in O(q), \text{Dét}(u) = \pm 1$.

4) Déterminer $O(q)$ lorsque $E = \mathbb{R}^2$ et $q(x) = 2x_1x_2$ où $x = (x_1, x_2)$.

Éléments de solution

1) $\Longrightarrow$ est clair puisque $q(x) = b(x, x)$ et $\Longleftarrow$ résulte pour sa part de la linéarité de u et du fait que $b(x, y) = [q(x + y) - q(x) - q(y)]/2$.

2) $O(q)$ est non vide (puisque il contient l'identité). Soient alors u et v dans $O(q)$. Pour x et y dans E,

$$q\,(u \circ v(x)) = q[u(v(x))] = q(v(x)) = q(x)$$

donc $u \circ v \in O(q)$. D'autre part,

$$q(x) = q[u(u^{-1}(x))] \text{ donc } q(x) = q(u^{-1}(x))$$

et donc $u^{-1} \in O(q)$.

3) Soit $u \in O(q)$. Soit $\mathscr{B}$ une base de E. On note B la matrice de q et M celle de u dans la base $\mathscr{B}$.
On suppose que $\forall\, x \in E, q[u(x)] = q(x)$ ce qui se traduit par :

$$\forall\, X, {}^t(MX)BMX = {}^tXBX.$$

D'où ${}^tMBM = B$ et donc $\text{Dét}(M)^2\,\text{Dét}(B) = \text{Dét}(B)$ soit $\text{Dét}(M)^2 = 1$ puisque q est non dégénérée.

4) Avec les mêmes notations que précédemment et en travaillant dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ où $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$,

$$\begin{aligned}
u \in O(q) &\Longleftrightarrow {}^tMBM = B \\
&\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&\Longleftrightarrow ac = 0,\ ad + bc = 0 \text{ et } bd = 0 \\
&\Longleftrightarrow \left(a = d = 0 \text{ et } c = \frac{1}{b}\right) \text{ ou } \left(b = c = 0 \text{ et } d = \frac{1}{a}\right)
\end{aligned}$$