Agrégation interne
UFR MATHÉMATIQUES

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Suites réelles

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs. Avant de parler de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, rappelons la définition de deux autres ensembles de nombres.

L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ est défini par

$$\mathbb{Q} = \{r \in \mathbb{R} \,/\, \exists n \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \exists m \in \mathbb{Z}^*, \quad r = \frac{n}{m}\}.$$

Les éléments de $\mathbb{Q}$ sont appelés les nombres rationnels et ceux de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ les nombres irrationnels.
Exemples : $1/3$ est un rationnel. π est un irrationnel.
Les entiers relatifs sont des rationnels.

L'ensemble des nombres décimaux est défini par

$$\mathbb{D} = \{r \in \mathbb{Q} \,/\, \exists k \in \mathbb{N}, \quad 10^k r \in \mathbb{Z}\}.$$

$x = 450.5767$ est un nombre décimal car $10^4 x$ est un entier.
Les nombres décimaux sont des rationnels, mais tous les rationnels ne sont pas des nombres décimaux. De plus, la somme et le produit de deux décimaux est un décimal, mais l'inverse d'un décimal non nul n'est pas toujours un décimal.

On a les inclusions : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

1. Quelques rappels sur le corps des réels

1.1. $\mathbb{R}$ est un corps commutatif totalement ordonné

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. Il est muni de deux opérations (addition et multiplication) qui vérifient les propriétés suivantes.

1) L'addition est associative :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, \quad (x+y)+z = x+(y+z).$$
2) L'addition a un élément neutre 0 :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x+0 = 0+x = x.$$
3) Tout nombre réel a un opposé pour l'addition :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \quad x+y = y+x = 0.$$
L'opposé d'un nombre réel x est unique : si y et z vérifient tous les deux $x+y = y+x = 0$ et $x+z = z+x = 0$, alors
$$y = y+0 = y+(x+z) = (y+x)+z = 0+z = z.$$
On désigne par $-x$ l'opposé de x.
4) L'addition est commutative :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad x+y = y+x.$$

$\mathbb{R}$ est donc un *groupe commutatif*.

5) La multiplication est associative :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, \quad (x \times y) \times z = x \times (y \times z).$$
6) La multiplication a un élément neutre 1 :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \times 1 = 1 \times x = x.$$

7) La multiplication est distributive par rapport à l'addition :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, \quad \begin{aligned} x \times (y+z) &= (x \times y) + (x \times z) \\ (y+z) \times x &= (y \times x) + (z \times x). \end{aligned}$$

8) La multiplication est commutative :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad x \times y = y \times x.$$

$\mathbb{R}$ est un *anneau unitaire commutatif.*

9) 0 est différent de 1 et tout nombre réel x différent de 0 a un inverse pour la multiplication :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \big(x \neq 0 \Longrightarrow (\exists y \in \mathbb{R}, \quad x \times y = y \times x = 1)\big).$$

Un tel inverse est unique (même démonstration que pour l'opposé pour l'addition) et on le note x^{-1}.

$\mathbb{R}$ est un *corps*. Comme autre corps, on connait le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels, le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

On utilise les notations habituelles pour la soustraction et la division : $x - y$ désigne $x + (-y)$ et x/y désigne $x \times y^{-1}$. On omet le plus souvent le symbole $\times$ pour écrire les multiplications.

10) $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre $\leq$:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ x \leq x & \quad \text{(réflexivité)}, \\ \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R},\ \big((x \leq y \text{ et } y \leq z) \Longrightarrow x \leq z\big) & \quad \text{(transitivité)}, \\ \forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ \big((x \leq y \text{ et } y \leq x) \Longrightarrow x = y\big) & \quad \text{(antisymétrie)}. \end{aligned}$$

11) L'ordre $\leq$ est total :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad (x \leq y \text{ ou } y \leq x).$$

12) L'ordre $\leq$ est compatible avec l'addition :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, \quad (x \leq y \Longrightarrow x + z \leq y + z).$$

13) Le produit de deux réels positifs ou nuls est positif ou nul :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \quad \big((0 \leq x \text{ et } 0 \leq y) \Longrightarrow 0 \leq xy\big).$$

Un corps muni en plus d'une relation d'ordre vérifiant les propriétés 10–13 est appelé un *corps totalement ordonné*. Les corps $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$ sont des corps totalement ordonnés.

Lemme 1 – Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, on a

$$|x+y| \leq |x| + |y| \quad \text{et} \quad \big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$$

Démonstration : la première inégalité, appelée inégalité triangulaire, se prouve en revenant à la définition de la valeur absolue.

La deuxième est une conséquence de la première, en utilisant les égalités $x = (x - y) + y$ et $y = (y - x) + x$. $\sqcup$

Ces deux inégalités sont fondamentales en analyse, où une grande partie du travail consiste à majorer et minorer des quantités.

Inégalités vraies (conséquences des items 12 et 13)

Si $a \geq 0$ et $b \leq c$, alors $ab \leq ac$.

Si $a \leq 0$ et $b \leq c$, alors $ab \geq ac$.

Si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$.

Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$, alors $0 \leq ac \leq bd$.

Définition 2 – I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si, et seulement si, pour tout a et b dans I tel que $a < b$, si $a < x < b$, alors $x \in I$.

En d'autres termes, les intervalles de $\mathbb{R}$ sont exactement les parties convexes de $\mathbb{R}$.

1.2. Propriété de la borne supérieure

Définition 3 – Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et a un élément de $\mathbb{R}$.
1 – On dit que a est un majorant (respectivement un minorant) de A si, pour tout $x \in A$, $x \leq a$ (respectivement $x \geq a$).
2 – On dit que A est majorée (respectivement minorée) si elle possède un majorant (respectivement un minorant).
3 – On dit que A est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Définition 4 – Soit A une partie de $\mathbb{R}$, on dit que A possède un plus grand (respectivement plus petit) élément s'il existe un élément **appartenant à** A qui majore (respectivement minore) A. On le note $\max A$ (respectivement $\min A$).

Proposition 5 – Si A possède un plus grand (respectivement plus petit) élément, celui-ci est unique.

Démonstration : supposons que A ait deux plus grands éléments distincts a et a', alors a est un majorant de A donc, pour tout $x \in A$, $x \leq a$, or $a' \in A$ donc $a' \leq a$. De même, a' est un majorant de A et $a \in A$ donc $a \leq a'$. On en déduit que $a = a'$. $\sqcup$

Définition 6 – Soit A une partie majorée de $\mathbb{R}$. Si l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément, celui-ci est appelé borne supérieure de A et est noté $\sup A$.

Définition 7 – Soit A une partie minorée de $\mathbb{R}$. Si l'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément, celui-ci est appelé borne inférieure de A et est noté $\inf A$.

Exemple - 1 est la borne supérieure de $[0, 1[$, 0 sa borne inférieure.

Lemme 8 – Si elle existe, la borne supérieure (resp. inférieure) est unique.

Propriété de la borne supérieure

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Caractérisation de la borne supérieure d'une partie E de $\mathbb{R}$ non vide et majorée

La borne supérieure de E, $\sup E$, vérifie les deux propriétés suivantes

- $\forall x \in E,\ x \leq \sup E$
- $\forall \varepsilon > 0,\ \ \exists x \in E,\ \ \sup E - \varepsilon \leq x (\leq \sup E)$.

Remarque - $\mathbb{Q}$ ne vérifie pas la propriété de la borne supérieure.

1.3. $\mathbb{R}$ est archimédien

De manière plus concrète, on a la propriété suivante : $\forall x > 0, \forall y > 0, \exists n \in \mathbb{N},\ \ ny > x$.
Cette propriété de $\mathbb{R}$ permet de définir la partie entière d'un réel x, notée $E(x)$, comme étant le plus grand entier inférieur ou égal à x. On a donc les inégalités $E(x) \leq x < E(x) + 1$.

Remarque - $\mathbb{Q}$ est également archimédien.

1.4. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

On peut identifier un sous-corps de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{Q}$, et on a

Proposition 9 – Soit a et a deux nombres réels tels que $a < b$, alors il existe un nombre rationnel r tel que $a < r < b$.

Ce résultat est une conséquence du caractère archimédien de $\mathbb{R}$.

Démonstration : si $a < 0 < b$, on fait $r = 0$. Si $a < b \leq 0$, on travaille avec les opposés : $0 \leq -b < -a$. On peut donc supposer $0 \leq a < b$. On choisit un entier $h > 0$ tel que

$1/h < b - a$ (c'est possible car $\mathbb{R}$ est archimédien). Soit d le plus petit entier naturel d tel que $d/h > a$ (il y en a bien un , toujours grâce à l'archimédianité). Alors $(d-1)/h \leq a$ et donc

$$\frac{d}{h} = \frac{d-1}{h} + \frac{1}{h} \leq a + \frac{1}{h} < b\,.$$

Donc le nombre rationnel d/h vérifie bien $a < d/h < b$. ⊔

Proposition 10 – $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Démonstration : il suffit d'appliquer la proposition précédente aux réels distincts $x - \varepsilon$ et $x + \varepsilon$. ⊔

On a également les propriétés suivantes :

- Tout intervalle non vide de $\mathbb{R}$ contient une infinité de nombres rationnels.
- Tout réel est limite d'une suite de rationnels.

Cette dernière propriété est fondamentale en analyse ; elle permet de prolonger à $\mathbb{R}$ des résultats obtenus sur $\mathbb{Q}$ en utilisant par exemple la continuité d'une fonction.

2. Suites réelles

2.1. Quelques rappels

2.1.1. Définitions

Définition 11 – Dire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite $\ell \in \mathbb{R}$ signifie que

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad (n \geq N \quad \Longrightarrow \quad |a_n - \ell| < \varepsilon.)}$$

Définition 12 – On dit qu'une suite de nombres réels est convergente quand elle a une limite ℓ dans $\mathbb{R}$.

Définition 13 – Si la suite (b_n) n'est pas convergente, on dit qu'elle est divergente.

Lemme 14 – Si la limite existe, elle est unique.

Démonstration : supposons que la suite (u_n) converge vers deux limites ℓ et ℓ'. Supposons que $\ell \neq \ell'$. Soit $\varepsilon = |\ell - \ell'|/2$. On devrait avoir d'une part un entier naturel N_1 tel que pour tout entier naturel $n \geq N_1$, $|a_n - \ell| < \varepsilon$, et d'autre part un entier naturel N_2 tel que pour tout entier $n \geq N_2$, $|a_n - \ell'| < \varepsilon$. Si l'on prend n supérieur à la fois à N_1 et à N_2, on devrait avoir

$$|\ell - \ell'| \leq |\ell - a_n| + |a_n - \ell'| < 2\varepsilon = |\ell - \ell'|\,.$$

On aboutit à une contradiction, donc une suite de nombres réels ne peut pas avoir plus d'une limite. ⊔

Définition 15 – Dire que $\lim a_n = +\infty$ signifie que $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, \quad A < a_n$.

Définition 16 – Dire que $\lim a_n = -\infty$ signifie que $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, \quad A > a_n$.

Proposition 17 – PROPRIÉTÉ DES GENDARMES
Soit (u_n), (a_n) et (b_n) trois suites de nombres réels. Si $\lim a_n = \lim b_n = \ell$ et si on a $a_n \leq u_n \leq b_n$ à partir d'un certain rang, alors $\lim u_n = \ell$.

2.1.2. Résultats à connaitre

Proposition 18 – ($\ell \in \mathbb{R}$ ou $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$).
Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ et ayant une limite ℓ lorsque x tend vers a. Alors, pour toute suite (u_n) qui converge vers a, la suite $\big(f(u_n)\big)$ converge vers ℓ.

Proposition 19 –

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, les suites $\left(\dfrac{n^\alpha}{n!}\right)_n$ et $\left(\dfrac{\alpha^n}{n!}\right)_n$ convergent vers 0.

Proposition 20 –

La suite $\left(\dfrac{n!}{n^n}\right)_n$ converge vers 0.

2.1.3. Quelques méthodes pour lever une indétermination

⚠ Les cas "indéterminés" dans la recherche des limites sont

$$\boxed{(+\infty)+(-\infty),\ 0\times(+\infty),\ 0\times(-\infty),\ \frac{0}{0} \text{ et } 1^\infty.}$$

Il n'y a pas de méthodes générales qui permettent de lever toutes les indéterminations, mais il existe néanmoins un certain nombre de techniques utiles à connaitre.

– Pour une limite en $+\infty$ (ce qui est toujours le cas pour l'étude de la convergence d'une suite), il est souvent utile de mettre en facteur le terme prépondérant ; pour cela, il faut connaitre l'ordre de prépondérance suivant

  " En $+\infty$, l'exponentielle l'emporte sur la puissance qui l'emporte sur le logarithme. "

  Ne pas oublier que, si $a > 0$, $a^n = e^{n \ln a}$ est une exponentielle.

$$\frac{n^2+2^n}{e^n+\ln n} = \frac{2^n}{e^n} \times \frac{1+n^2/2^n}{1+\ln n/n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

– Pour une indétermination du type $\infty-\infty$ dans un terme comportant des racines carrées, il faut penser à utiliser la forme conjuguée.

$$n-\sqrt{n^2+1} = -\frac{1}{n+\sqrt{n^2+1}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

– Penser à utiliser le théorème des gendarmes en présence d'une fonction bornée.

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n} \text{ donc } \frac{\sin n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

– Lors de l'étude de suite de la forme $u_n^{v_n}$, passer en exponentielle (après avoir vérifié que u_n est positif à partir d'un certain rang) : $u_n^{v_n} = e^{v_n \ln(u_n)}$ et étudier la limite de $v_n \ln(u_n)$.

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln(1+\frac{1}{n})}, \text{ or } n\ln(1+\frac{1}{n}) = \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

$$\text{car } \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \text{ d'où } \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

2.1.4. Un peu de vocabulaire

Définition 21 –
1 – Dire que la suite (u_n) est croissante signifie que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+1}}$

2 – Dire que la suite (u_n) est strictement croissante signifie que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < u_{n+1}}$

3 – Dire que la suite (u_n) est décroissante signifie que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq u_{n+1}}$

4 – Dire que la suite (u_n) est strictement décroissante signifie que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > u_{n+1}}$

Définition 22 –
1 – Dire que la suite (u_n) est majorée signifie que $\boxed{\exists M \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq M}$

2 – Dire que la suite (u_n) est minorée signifie que $\boxed{\exists M \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq M}$

3 – Dire que la suite (u_n) est bornée signifie qu'elle est majorée et minorée

2.2. Convergence de suites

2.2.1. Suites monotones

Proposition 23 – Toute suite de réels croissante et majorée est convergente.
Toute suite de réels décroissante et minorée est convergente.

Démonstration : montrons la première partie de la proposition. Soit $(u_n)_n$ une suite de réels croissante et majorée. Il existe alors un réel M tel que, pour tout entier naturel n, $u_n \leq M$.
Soit $E = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. E est un ensemble de réels majoré par M et non vide, il admet donc une borne supérieure l. Montrons que l est la limite de $(u_n)_n$.
Soit $\varepsilon > 0$, par définition de la borne supérieure, il existe un entier naturel N tel que $l - \varepsilon < u_N$, or la suite $(u_n)_n$ est croissante, donc, pour tout entier naturel $n \geq N$, $l - \varepsilon < u_n \leq l$. D'où le résultat. $\sqcup$

Si une suite est croissante et majorée par M, elle est convergente, mais rien ne prouve que sa limite soit M.

2.2.2. Suites adjacentes

Définition 24 – Soit (a_n) et (b_n) deux suites réelles telles que

- (a_n) est croissante à partir d'un certain rang et (b_n) est décroissante à partir d'un certain rang,
- $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n - b_n) = 0$,

Les suites (a_n) et (b_n) sont dites adjacentes.

Proposition 25 – Deux suites adjacentes sont convergentes et elles ont la même limite.

Démonstration : montrons que $a_n \leq b_n$ pour tout entier n. Posons $c_n = a_n - b_n$. La suite (c_n) converge vers 0 d'après l'item 3 ; elle est croissante, en effet $a_{n+1} - b_{n+1} \geq a_n - b_n$ car (a_n) croit et (b_n) décroit. On en déduit qu'elle est négative ; donc, pour tout entier n, $a_n \leq b_n$. Comme (b_n) est décroissante et $(a_n) \leq b_n$, on a pour tout n, $a_n \leq b_0$. La suite (a_n) est croissante et majorée et donc convergente. Puisque $\lim(b_n - a_n) = 0$, on a $\lim b_n = \lim(b_n - a_n) + \lim a_n = \lim a_n$. $\sqcup$

Remarque - Cette proposition ne donne pas la valeur de la limite, seulement son existence. Donnons un exemple de nombre réel défini par deux suites adjacentes. Nous allons démontrer le résultat suivant.

Proposition 26 – Tout nombre réel positif ou nul a une racine carrée dans $\mathbb{R}$.

Démonstration : soit r un nombre réel, $0 \leq r$. On va définir par récurrence une suite de segments emboîtés $[a_n, b_n]$, par le procédé de dichotomie ("action de couper en deux"). On veut que pour tout entier n, l'inégalité suivante soit vérifiée :

$$(a_n)^2 \leq r < (b_n)^2.$$

Pour le choix du premier segment, on procède de la manière suivante : on définit b_0 comme étant le plus petit entier naturel qui vérifie $r < (b_0)^2$. D'après l'axiome d'archimédianité, il y a des entiers naturels p plus grands que r, et un tel p vérifie $p^2 \geq p > r$. Puisqu'il y a des entiers dont le carré est strictement plus grand que r, on peut bien prendre le plus petit de ces entiers. On pose $a_0 = b_0 - 1$. Comme $b_0 \geq 1$, on a $a_0 \geq 0$. Par définition de b_0, on a $(a_0)^2 \leq r < (b_0)^2$.
Supposons maintenant que l'on a déjà construit le segment $[a_n, b_n]$ vérifiant l'inégalité $(a_n)^2 \leq r < (b_n)^2$. Alors

a) *Si $\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right)^2 \leq r$, on pose $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$ (on garde la moitié droite du segment).*
b) *Sinon, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ (on garde la moitié gauche).*

Le choix de la moitié du segment que l'on garde s'est fait de telle manière que l'on ait bien $(a_{n+1})^2 \leq r < (b_{n+1})^2$. La dichotomie consiste à couper le segment en deux à chaque étape. Comme la longueur du segment $[a_0, b_0]$ est 1, celle du segment $[a_n, b_n]$ vaut $1/2^n$. Cette longueur tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Donc, d'après la proposition 25, il existe un et un seul réel ℓ qui vérifie $a_n \leq \ell \leq b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a $0 \leq a_0 \leq \ell$. Pour voir que ℓ est la racine carrée de r, il reste à vérifier que $\ell^2 = r$.
Comme $\lim a_n = \lim b_n = \ell$, on a $\lim (a_n)^2 = \lim (b_n)^2 = \ell^2$. Des inégalités $(a_n)^2 \leq r < (b_n)^2$ on déduit par passage à la limite que

$$\ell^2 = \lim (a_n)^2 \leq r \leq \lim (b_n)^2 = \ell^2 ,$$

et donc $\ell^2 = r$. $\sqcup$

2.3. Développement décimal

Nous allons voir maintenant un exemple important, d'encadrement d'un nombre réel par des suites adjacentes de nombres rationnels : le *développement décimal*.
Soit ℓ un réel positif ou nul. On note $E(\ell)$ sa partie entière, c'est-à-dire l'entier naturel tel que $E(\ell) \leq \ell < E(\ell) + 1$. L'existence de cette partie entière est assurée par le fait que $\mathbb{R}$ est archimédien : cet axiome entraîne qu'il y a des entiers naturels strictement plus grands que ℓ, donc on peut prendre le plus petit entier p tel que $p > \ell$ et on pose $E(\ell) = p - 1$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$; on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = 10^{-n} E(10^n x)$. On a alors $0 \leq x - x_n < 10^{-n}$ car $10^n x_n = E(10^n x) \leq 10^n x < E(10^n x) + 1$ par définition de la partie entière.

Définition 27 – On dit que x_n est l'approximation décimale par défaut de x à 10^{-n} près.

Proposition 28 – $x = \lim x_n$

Posons $a_n = E(10^n x) - 10\, E(10^{n-1} x) = 10^n (x_n - x_{n-1})$.

Lemme 29 – a_n est un entier compris entre 0 et 9.

Démonstration : a_n est, par définition de la partie entière, un entier.
On a $E(10^{n-1}x) \leq 10^{n-1}x < E(10^{n-1}x) + 1$, d'o $10E(10^{n-1}x) \leq 10^n x < 10E(10^{n-1}x) + 10$ et, par définition de $E(10^n x)$, on obtient

$$10E(10^{n-1}x) \leq E(10^n x) < E(10^n x) + 1 \leq 10E(10^{n-1}x) + 10.$$

On en déduit que

$$0 \leq E(10^n x) - 10\,E(10^{n-1}x) < 10.$$

□

On a de plus

$$\begin{array}{ll} a_n = 10^n(x_n - x_{n-1}) & 10^{-n}a_n = x_n - x_{n-1} \\ a_{n-1} = 10^{n-1}(x_{n-1} - x_{n-2}) & 10^{-(n-1)}a_{n-1} = x_{n-1} - x_{n-2} \\ \dots & \dots \\ a_1 = 10(x_1 - x_0) & 10^{-1}a_1 = x_1 - x_0 \end{array}$$

En additionnant, on obtient $x_n = x_0 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{10^i}$ *où* $x_0 = E(x)$.

On note $x = x_0 + \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i 10^{-i} = x_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ *et on appelle cette écriture le développement décimal propre illimité de* x.
On admet la réciproque, c'est-à-dire qu'un développement décimal illimité représente un réel et que deux développements décimaux illimités peuvent représenter le même réel. Ce résultat est démontré au moment de l'étude des séries.

Exemple - $1 = 0,99999\dots$ *et* $0,356 = 0,355999999\dots$.

Pour $x < 0$, *on utilise le développement décimal propre illimité de* $-x = x_0, a_1 a_2 \cdots$ *puis* $x = -x_0, a_1 a_2 \cdots$. *Dans ce cas,* $E(x) = -x_0 - 1$. □

Théorème 30 – Un rationnel admet un développement décimal illimité qui est périodique à partir d'un certain rang.

La preuve se fait au moyen de la division euclidienne.
On admet la réciproque, c'est-à-dire que
Tout réel admettant un développement décimal illimité périodique à partir d'un certain rang est un rationnel.

Exemple -

$$x = 3,46\underbrace{53}\,\underbrace{53}\cdots = 3 + \frac{46}{100} + \frac{53}{900} = \frac{3167}{900}$$
$$x = 1,\underbrace{714285}\,\underbrace{714285}\cdots = \frac{12}{7}$$

Remarque - Le développement décimal d'un réel est unique si l'on suppose de plus que $\{a_n\,;\, a_n < 9\}$ est infini (ce qui revient à écarter le cas d'une suite qui devient constante égale à 9).

2.4. Théorème de Bolzano-Weierstrass

Définition 31 – Soit $(u_n)_n$ une suite de réels. On dit que la suite $(v_n)_n$ est extraite de la suite $(u_n)_n$ s'il existe une application strictement croissante φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $v_n = u_{\varphi(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Lemme 32 – Soit φ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Alors, pour tout entier naturel n, on a $n \leq \varphi(n)$.

Démonstration : soit H_n *l'inégalité* $n \leq \varphi(n)$. *Comme* φ *est à valeurs dans* $\mathbb{N}$, *on a* $\varphi(0) \geq 0$ *et* H_0 *est vérifiée. Supposons que* H_n *est vraie et montrons que* H_{n+1} *est vraie. L'application* φ *étant strictement croissante, on a* $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ *; comme elle est à valeurs entières, on a* $\varphi(n+1) \geq \varphi(n) + 1$. *On a alors* $\varphi(n+1) \geq \varphi(n) + 1 \geq n + 1$ *d'après* H_n *et on a montré que* H_{n+1} *est vraie. On a prouvé le lemme par récurrence.* □

Proposition 33 – Soit $\ell \in \mathbb{R}$ ou $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$.
Si (u_n) est une suite réelle telle que $\lim u_n = \ell$, et si (v_n) est une suite extraite de (u_n), alors $\lim v_n = \lim u_n$.

$\boxed{\text{Toute suite extraite d'une suite tendant vers } \ell \text{ tend vers } \ell.}$

Démonstration : dans le cas où $\ell \in \mathbb{R}$. Donnons nous $\varepsilon > 0$. On a un entier N tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$. On suppose que $v_n = u_{\varphi(n)}$ où φ est strictement croissante. On a toujours $\varphi(n) \geq n$ d'après le lemme 32. Donc, si $n \geq N$, alors $\varphi(n) \geq N$, d'où $|v_n - \ell| = |u_{\varphi(n)} - \ell| < \varepsilon$. Ceci montre que $\lim v_n = \ell$.
Si $\ell = +\infty$, donnons $A \in \mathbb{R}$, alors il existe un entier naturel N tel que, pour tout $n \geq N$, $u_n \geq A$. Si $n \geq N$, alors $\varphi(n) \geq N$, d'où $v_n = u_{\varphi(n)} \geq A$ et $\lim v_n = +\infty$.
Le cas $\ell = -\infty$ se traite de même. $\sqcup$

Remarques - • La contraposée de la proposition 33 permet de prouver que, si on trouve une suite extraite de la suite (u_n) qui diverge, alors la suite (u_n) diverge. Ex : $u_n = (-1)^n n$.
• Pour prouver qu'une suite diverge, on peut également essayer de construire deux suites extraites convergentes et n'ayant pas la même limite. Ex : $u_n = (-1)^n$.

Proposition 34 – Soit $\ell \in \mathbb{R}$ ou $\ell = +\infty$ ou $\ell = -\infty$.
Soit (u_n) une suite réelle.
Si les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers ℓ, alors la suite (u_n) tend vers ℓ.
Démonstration : dans le cas $\ell \in \mathbb{R}$, les deux autres cas sont laissés au lecteur. Posons $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$. Soit $\varepsilon > 0$, comme ces deux suites convergent vers ℓ, il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $|v_n - \ell| < \varepsilon$ et $|w_n - \ell| < \varepsilon$, i.e. $|u_{2n} - \ell| < \varepsilon$ et $|u_{2n+1} - \ell| < \varepsilon$. Si l'on pose $n_1 = 2n_0 + 1$, alors, pour tout entier $n \geq n_1$, on a, soit n pair et il existe un entier p tel que $n = 2p$, avec $p \geq n_0$, soit n impair et il existe un entier p tel que $n = 2p + 1$, avec $p \geq n_0$, dans les deux cas, on obtient que $|u_n - \ell| < \varepsilon$. $\sqcup$

Définition 35 – On dit que la suite réelle (u_n) a une *valeur d'adhérence* ℓ s'il existe une suite extraite de (u_n) qui converge vers ℓ.

Proposition 36 – Une suite qui a deux valeurs d'adhérence distinctes est divergente.

On a le théorème de Bolzano-Weierstrass[1]

Théorème 37 – Toute suite **bornée** de réels admet une valeur d'adhérence.

Démonstration : ce théorème se démontre par un procédé de dichotomie. Par hypothèse, il existe $M > 0$ tel que, pour tout entier naturel n, $|u_n| < M$. Posons $a_0 = -M$ et $b_0 = M$. Tous les termes de la suite sont dans $[a_0, b_0]$. Posons $\varphi(0) = 0$, alors $u_{\varphi(0)} \in [a_0, b_0]$. Supposons construit $[a_p, b_p]$, qu'il y ait une infinité d'éléments de la suite $(u_n)_n$ dans $[a_p, b_p]$ et que l'on ait défini $\varphi(p)$ tel que $v_p = u_{\varphi(p)} \in [a_p, b_p]$. On coupe le segment en deux parties égales ; nécessairement, il y a une infinité d'éléments de la suite dans au moins l'une des deux moitiés du segment ; on définit alors $[a_{p+1}, b_{p+1}]$ comme étant ce demi segment. Comme il y a une infinité de termes de la suite dans ce nouveau segment, il y en a au moins un dont l'indice est plus grand que $\varphi(p)$ et donc on peut choisir $\varphi(p+1) > \varphi(p)$ tel que $v_{p+1} = u_{\varphi(p+1)} \in [a_{p+1}, b_{p+1}]$. La longueur du segment $[a_p, b_p]$ tend vers 0 ; les suites $(a_p)_p$ et $(b_p)_p$ sont adjacentes ; elles convergent donc vers la même limite l. On pose alors $v_p = u_{\varphi(p)}$ et on a montré que $(v_p)_p$ converge vers l. $\sqcup$

2.5. $\mathbb{R}$ est complet

Définition 38 – Une suite $(u_n)_n$ de réels est dite suite de Cauchy[2] si elle vérifie

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N, \forall p \geq N, |\, u_n - u_p \,| < \varepsilon.$$

(1) Bernhard Bolzano (1781-1848), Karl Weierstrass (1815-1897)
(2) Augustin-Louis Cauchy (1798-1857)

Théorème 39 – Une suite de réels est convergente si et seulement si c'est une suite de Cauchy.

Remarque - Toute suite convergente d'un espace métrique est une suite de Cauchy. Les espaces pour lesquels la réciproque est vraie sont dits complets. La complétude de $\mathbb{R}$ permet de montrer la convergence d'une suite sans en déterminer la limite.

Démonstration : soit $(u_n)_n$ une suite réelle de Cauchy. Montrons d'abord qu'elle est bornée. Soit $\varepsilon = 1$, alors il existe N_1 tel que, pour tout $n \geq N_1$, $\mid u_n - u_{N_1} \mid < 1$. On en déduit que la suite $(u_n)_n$ est bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut extraire une suite $(v_n)_n$ de $(u_n)_n$ qui converge vers l. Montrons que la suite $(u_n)_n$ converge vers l. Soit $\varepsilon > 0$, on a

$$|u_n - l| \leq |u_n - v_n| + |v_n - l| = |u_n - u_{\varphi(n)}| + |v_n - l|.$$

Il existe N_2 tel que, pour tout $n \geq N_2$, $|v_n - l| < \varepsilon/2$ car la suite $(v_n)_n$ converge vers l et il existe N_3 tel que, pour tout $n \geq N_3$, $|u_n - u_{\varphi(n)}| < \varepsilon/2$ car la suite $(u_n)_n$ est de Cauchy et $\varphi(n) > n$. En posant $N = \sup(N_2, N_3)$, on prouve le résultat. $\sqcup$

2.6. Théorème de Heine

Théorème 40 – Toute fonction continue sur un segment I de $\mathbb{R}$ est uniformément continue sur ce segment I.

Démonstration : soit f une fonction continue sur un segment I, c'est-à-dire un intervalle fermé borné. Raisonnons par l'absurde et supposons que f n'est pas uniformément continue sur I. Alors

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists (x, y) \in I^2, \quad \big(|x - y| \leq \eta \text{ et } |f(x) - f(y)| > \varepsilon\big).$$

En particulier, en prenant $\eta = 1/n$, on obtient

$$(1) \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists (x_n, y_n) \in I^2, \quad \left(|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon\right).$$

Les suites (x_n) et (y_n) sont bornées car I est borné.
D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire des suites convergentes. Soit $(x_{\varphi(n)})$ une telle sous-suite. Notons ℓ sa limite, ℓ appartient à I car I est fermé. Comme $|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| \leq 1/\varphi(n)$ et que $\lim \varphi(n) = +\infty$ d'après le lemme 32, on en déduit que la suite $(y_{\varphi(n)})$ converge également vers ℓ.
L'application f étant continue, les suites $\big(f(x_{\varphi(n)})\big)$ et $\big(f(y_{\varphi(n)})\big)$ convergent vers $f(\ell)$, ce qui contredit (1). $\sqcup$

SUITES RÉELLES