Agrégation interne
UFR MATHÉMATIQUES

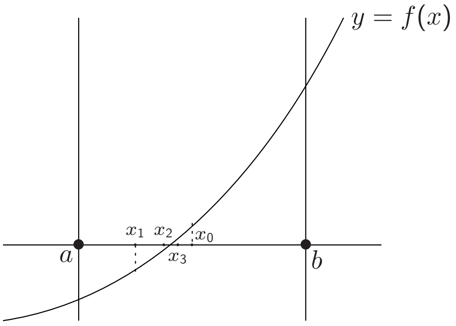
UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Résolution d'équations non linéaires

On considère une fonction réelle f définie sur un intervalle $[a,b]$, avec $a < b$, et continue sur cet intervalle et on suppose que f admet une unique racine sur $I =]a,b[$, c'est-à-dire qu'il existe un unique $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = 0$.

1. Méthode de dichotomie

On considère un intervalle $[a,b]$ et une fonction f continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(a)f(b) < 0$ et que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[a,b]$.
La méthode de dichotomie consiste à construire une suite (x_n) qui converge vers α de la manière suivante :



Dichotomie

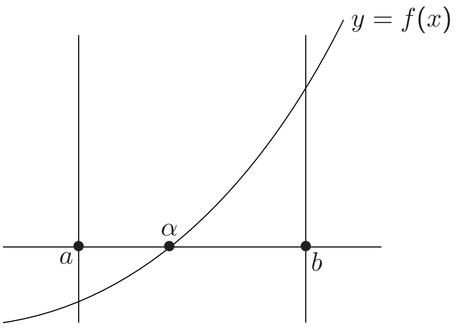
Initialisation : on prend pour x_0 le milieu de $[a,b]$. La racine se trouve alors dans l'un des deux intervalles $]a,x_0[$ ou $]x_0,b[$ ou bien elle est égale à x_0.

- si $f(a)f(x_0) < 0$, alors $\alpha \in]a,x_0[$. On pose $a_1 = a$, $b_1 = x_0$.
- si $f(a)f(x_0) = 0$, alors $\alpha = x_0$.
- si $f(a)f(x_0) > 0$, alors $\alpha \in]x_0,b[$. On pose $a_1 = x_0$, $b_1 = b$.

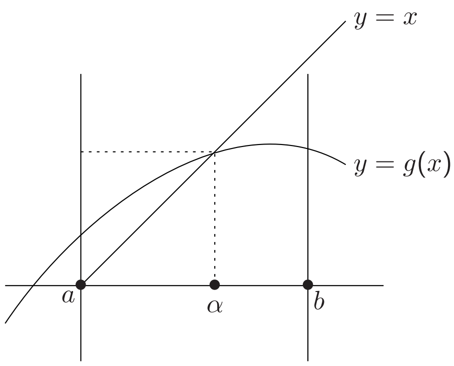
On prend alors pour x_1 le milieu de $[a_1,b_1]$. On construit ainsi une suite $x_0 = (a+b)/2$, $x_1 = (a_1+b_1)/2, \ldots, x_n = (a_n+b_n)/2$ telle que $|\alpha - x_n| \leq (b-a)/2^{n+1}$.

Etant donné une précision ε, cette méthode permet d'approcher α en un nombre prévisible d'itérations.

Les principes de construction suivants consistent à transformer l'équation $f(x) = 0$ en une équation équivalente $g(x) = x$. On peut poser par exemple $g(x) = x + f(x)$, mais on prendra plus généralement $g(x) = x + u(x)f(x)$ où u est une fonction non nulle sur l'intervalle I. Il reste à choisir u pour que la suite définie par $x_0 \in I$ et la relation de récurrence $x_{n+1} = x_n + u(x_n)f(x_n)$ soit bien définie et converge vers la racine α de f.
Géométriquement, on a remplacé la recherche de l'intersection du graphe de la fonction f avec l'axe Ox, par la recherche de l'intersection de la droite d'équation $y = x$ avec la courbe d'équation $y = g(x)$.



Racine de f



Point fixe de g

Le choix d'une méthode est conditionné par les réponses aux questions suivantes :
1) la suite (x_n) converge-t-elle ?
2) si la suite converge, sa limite est-elle α ?
3) si on veut la solution à ε près, comment arrêter les itérations dès que cette condition est remplie ?
4) comme dans tout calcul, on désire obtenir rapidement le résultat approché, il faudra donc estimer la manière dont évolue l'erreur $e = x_n - \alpha$ au cours des itérations.
Les deux premières questions sont purement mathématiques. Les deux dernières sont numériques, car on ne peut effectuer qu'un nombre fini d'itérations pour le calcul.
La continuité des fonctions considérées permet de répondre à la question 2 : si la suite converge, elle converge vers une racine de l'équation ; si, de plus, $x_n \in I$, pour tout n, alors par unicité de la racine dans I, la suite converge vers α.

2. Théorème du point fixe

Définition 1 – On dit que l'application $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ est strictement contractante si

$$\exists L \in]0, 1[, \forall x \in [a, b], \forall y \in [a, b], \ |g(x) - g(y)| \leq L|x - y|.$$

Proposition 2 – Soit g une application de classe $\mathscr{C}^1$ de l'intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que g' vérifie

$$\max\{|g'(x)| \,;\, x \in [a, b]\} \leq L < 1,$$

alors l'application g est strictement contractante dans l'intervalle $[a, b]$.

Théorème 3 – Si g est une application définie sur l'intervalle $[a, b]$ **à valeurs dans** $[a, b]$, alors la suite (x_n) définie par $x_0 \in [a, b]$ et la relation de récurrence $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers l'unique solution α de l'équation $x = g(x)$ avec $\alpha \in [a, b]$. *Démonstration : la suite (x_n) est bien définie car $g([a, b]) \subset [a, b]$.*
Montrons, par l'absurde, que l'équation $x = g(x)$ a au plus une solution. Supposons qu'il y ait deux solutions α_1 et α_2, alors

$$|\alpha_1 - \alpha_2| = |g(\alpha_1) - g(\alpha_2)| \leq L|\alpha_1 - \alpha_2|,$$

or $L < 1$ donc nécessairement $\alpha_1 = \alpha_2$.
Montrons que la suite (x_n) est convergente. On a

$$|x_{n+1} - x_n| = |g(x_n) - g(x_{n-1}| \leq L|x_n - x_{n-1}|$$

et par récurrence

$$|x_{n+1} - x_n| \leq L^n|x_1 - x_0|.$$

On en déduit que

$$|x_{n+p} - x_n| \leq L^n|x_1 - x_0|\frac{1 - L^p}{1 - L} \leq |x_1 - x_0|\frac{L^n}{1 - L}.$$

Cette suite vérifie le critère de Cauchy ; elle est donc convergente vers $\alpha \in [a, b]$, or l'application g est continue donc la limite α vérifie $g(\alpha) = \alpha$. ⊔

On a aussi une évaluation de l'erreur en faisant tendre p vers l'infini, on obtient

$$|\alpha - x_n| \leq |x_1 - x_0|\frac{L^n}{1 - L}.$$

On constate que, pour n fixé, l'erreur est d'autant plus petite que L est proche de 0.

3. Méthode de la sécante

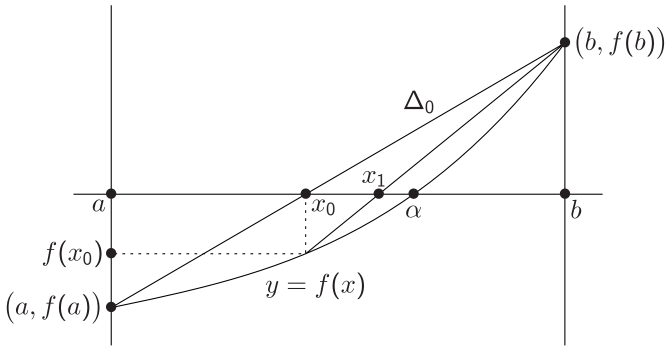
3.1. Description de la méthode

Cette méthode est également appelée méthode de Lagrange, méthode des parties proportionnelles ou encore regula falsi...

On considére un intervalle $[a, b]$ et une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f(a)f(b) < 0$ et que f' ne s'annule pas sur $[a, b]$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[a, b]$.

Remarque - L'hypothèse "f dérivable" suffirait, mais demanderait une rédaction un peu plus fine des démonstrations.

La méthode de la sécante consiste à construire une suite (x_n) qui converge vers α de la manière suivante : soit Δ_0 la droite passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$, elle coupe l'axe Ox en un point d'abscisse $x_0 \in]a, b[$. On approche donc la fonction f par un polynôme P de degré 1 et on résout $P(x) = 0$.



Méthode de la sécante

Ensuite, suivant la position de α par rapport à x_0, on considère la droite passant par $(a, f(a))$ et $(x_0, f(x_0))$ si $f(x_0)f(a) < 0$ ou celle passant par $(x_0, f(x_0))$ et $(b, f(b))$ si $f(x_0)f(b) < 0$. On appelle x_1 l'abscisse du point d'intersection de cette droite avec l'axe Ox. On réitère ensuite le procédé.

Plaons-nous dans le cas où $f' > 0$ est dérivable et f est convexe (i.e. $f'' \geq 0$), alors la suite (x_n) est définie par

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = \dfrac{bf(x_n) - x_n f(b)}{f(x_n) - f(b)} \end{cases}$$

En effet, si f est convexe, on remplace l'intervalle $[x_n, b]$ par l'intervalle $[x_{n+1}, b]$. L'équation d'une droite passant par $\big(c, f(c)\big)$ et $\big(b, f(b)\big)$ avec $c \neq b$ est $y - f(b) = \dfrac{f(b) - f(c)}{b - c}(x - b)$. On cherche son intersection avec l'axe Ox donc on prend $y = 0$ et on obtient la formule donnée plus haut.

Remarque - si f est convexe, alors sa représentation graphique est au dessus des tangentes et en dessous des cordes.

On pose $g(x) = \dfrac{bf(x) - xf(b)}{f(x) - f(b)} = x - \dfrac{b - x}{f(b) - f(x)} f(x)$ d'où $x_{n+1} = g(x_n)$.

Montrons que cette suite (x_n) est définie.

Pour cela, il suffit de montrer que $g([a, b]) \subset [a, b]$. Vérifions d'abord que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$. Elle l'est de manière évidente sur $[a, b[$. L'application g est continue en b et $g(b) = b - f(b)/f'(b)$. On a, pour tout $x \in [a, b[$

$$\begin{aligned} g'(x) &= 1 - f'(x)\frac{b - x}{f(b) - f(x)} + f(x)\frac{f(b) - f(x) - (b - x)f'(x)}{\big(f(b) - f(x)\big)^2} \\ &= f(b)\frac{f(b) - f(x) - (b - x)f'(x)}{\big(f(b) - f(x)\big)^2}. \end{aligned}$$

On en déduit que g' est continue en b et $g'(b) = f(b)f''(b)/\big(2f'(b)^2\big)$. De plus, l'application f est convexe, donc $f(b) - f(x) - (b - x)f'(x) \geq 0$. On a également $f(b) > 0$

car f croissante et $f(a)f(b) < 0$. La fonction g est donc croissante sur $[a, b]$. On a alors $g([a, b]) \subset [g(a), g(b)]$. De plus, $g(a) = a - f(a)\dfrac{(b-a)}{f(b)-f(a)}$, or $f(a) < 0$ et $\dfrac{(b-a)}{f(b)-f(a)} \geq 0$ par croissance de f ; donc $g(a) \geq a$. De même $g(b) = b - \dfrac{f(b)}{f'(b)}$, or $f'(b) > 0$ et $f(b) > 0$ donc $g(b) \leq b$.

La croissance de g montre que la suite (x_n) est croissante car $x_1 = g(a) \geq a = x_0$, or elle est dans l'intervalle $[a, b]$, donc elle converge vers $l \in [a, b]$ tel que, par continuité de g, $g(l) = l$. De plus, $x_0 \leq \alpha$ donc une récurrence immédiate et la croissance de g montrent que, pour tout entier n, $x_n \leq \alpha$. On en déduit que $l \leq \alpha$, c'est-à-dire que $l \in]a, b[$.

Soit $x \in]a, b[$ tel que $f(x) = 0$, alors il est immédiat que $g(x) = x$. Réciproquement, soit $x \in]a, b[$ tel que $g(x) = x$, alors $\dfrac{b-x}{f(b)-f(x)}f(x) = 0$, or $x \neq b$ et $f(x) \neq f(b)$ car f est strictement croissante et $x \in]a, b[$. On en déduit que $f(x) = 0$. Il y a unicité de la racine de f, donc $l = \alpha$ et la suite (x_n) converge vers α.

3.2. Rapidité de convergence de la méthode de la sécante

On a $x_n - \alpha = g'(\xi)(x_{n-1} - \alpha)$. On en déduit, par continuité de g' en α, que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|x_n - \alpha|}{|x_{n-1} - \alpha|} = |g'(\alpha)| = g'(\alpha).$$

4. Méthode de Newton

On cherche les points fixes de la fonction $g(x) = x + u(x)f(x)$, et on a vu que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|x_n - \alpha|}{|x_{n-1} - \alpha|} = |g'(\alpha)| = g'(\alpha).$$

Pour obtenir une convergence plus rapide, on peut chercher u tel que $g'(\alpha) = 0$. On a, si les fonctions ont les régularités nécessaires, $g'(x) = 1 + u'(x)f(x) + u(x)f'(x)$ et on en déduit que $g'(\alpha) = 0$ si $u(\alpha) = -1/f'(\alpha)$. Si la fonction f' ne s'annule pas, on peut donc choisir $u(x) = -1/f'(x)$. On obtient alors la méthode de Newton.

4.1. Description de la méthode

On considère une fonction réelle définie sur un intervalle $I = [a, b]$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f(a)f(b) < 0$; on suppose que les fonctions f' et f'' ne s'annulent pas et gardent chacune un signe constant sur I. On pose

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Si $f'f''$ est positive (respectivement négative) sur $[a, b]$, on pose $x_0 = b$ (respectivement a). On définit alors la suite (x_n) par la donnée de x_0 et la relation de récurrence $x_{n+1} = g(x_n)$.

Théorème 4 – La suite (x_n) converge vers α l'unique racine de f sur $[a, b]$.

Démonstration : pour simplifier la rédaction, on va supposer que f' est strictement positive et f'' est strictement négative sur I. Les autres cas se traitent de manière similaire. Ces hypothèses assurent l'existence et l'unicité de $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = 0$.

On va montrer que la suite (x_n) est croissante et majorée par α. On a $x_0 = a$, donc $x_0 \leq \alpha$. Supposons que $x_n \leq \alpha$, alors, comme $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ et que la fonction f'

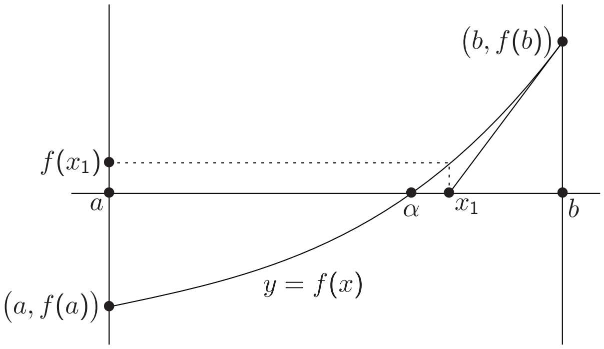
est positive, donc f est croissante, on en déduit immédiatement que $x_{n+1} \geq x_n$ et la suite (x_n) est croissante. De plus, $x_{n+1} - \alpha = g(x_n) - g(\alpha) = g'(\xi)(x_n - \alpha)$ avec $\xi \in]x_n, \alpha[$. Or $g'(x) = \dfrac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$ donc $g'(\xi) > 0$ et $x_{n+1} \leq \alpha$.

La suite (x_n) est croissante et majorée ; elle est donc convergente. Notons ℓ sa limite. La continuité de g permet d'écrire que $\ell = g(\ell)$ et donc $f(\ell) = 0$ d'où $\ell = \alpha$. $\sqcup$

4.2. Interprétation graphique

La méthode de Newton consiste à remplacer la courbe par sa tangente en une de ses deux extrémités. Le point x_1 est l'intersection de cette tangente avec l'axe Ox.

Pour faire le dessin, on va se placer dans le cas étudié pour la méthode de la sécante, i.e. $f' > 0$ et $f'' < 0$. On prend alors $x_0 = b$.



Méthode de Newton

Traons la tangente à la courbe représentative de f passant par $(b, f(b))$. L'équation de cette tangente est $y = f'(b)(x-b) + f(b)$. Son intersection avec l'axe Ox a une ordonnée nulle et son abscisse vaut $x_1 = b - \dfrac{f(b)}{f'(b)}$. On trace ensuite la tangente à la courbe au point $(x_1, f(x_1))$. Le réel x_2 est l'abscisse de l'intersection de cette deuxième tangente avec l'axe Ox et on réitère ce procédé.

Remarque - Si on prenait la tangente à la courbe en $(a, f(a))$, son intersection avec l'axe Ox ne serait pas, sur ce dessin, dans l'intervalle $[a, b]$.

4.3. Rapidité de convergence de la méthode de Newton

On suppose que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^3$ sur $I = [a, b]$, que l'on a $f(a)f(b) < 0$ et que les fonctions f' et f'' sont toutes deux strictement positives sur $[a, b]$. Ceci nous garantit l'existence et l'unicité d'une racine simple α de f sur $[a, b]$. On a donc $f(\alpha) = 0$ et $f'(\alpha) \neq 0$.

On pose $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ et on définit la suite (x_n) par $x_0 = b$ et la relation de récurrence $x_{n+1} = g(x_n)$.

Théorème 5 – On a alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{| x_{n+1} - \alpha |}{| x_n - \alpha |} = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{| x_{n+1} - \alpha |}{| x_n - \alpha |^2} = \frac{1}{2}\frac{f^{(2)}(\alpha)}{f'(\alpha)}$.

Démonstration : puisque f est de classe $\mathscr{C}^3$, g est de classe $\mathscr{C}^2$; on a $g'(\alpha) = \dfrac{f(\alpha)f''(\alpha)}{(f'(\alpha)^2)} = 0$ car α est racine simple de f.

La formule de Taylor à l'ordre 1 s'écrit $x_n - \alpha = g(x_n) - g(\alpha) = (x_n - \alpha)g'(\xi)$ or g' est continue sur $[a, b]$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{| x_{n+1} - \alpha |}{| x_n - \alpha |} = g'(\alpha) = 0$.

La formule de Taylor à l'ordre 2 s'écrit

$$x_n - \alpha = g(x_n) - g(\alpha) = (x_n - \alpha)g'(\alpha) + \frac{1}{2}(x_n - \alpha)^2 g''(\xi) = \frac{1}{2}(x_n - \alpha)^2 g^{(2)}(\xi)$$

or $g'^{(2)}$ est continue sur $[a, b]$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{| x_{n+1} - \alpha |}{| x_n - \alpha |^2} = g^{(2)}(\alpha) = \frac{1}{2}\frac{f^{(2)}(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

$\square$

Remarque - Le résultat est encore vrai si on suppose que f est de classe $\mathscr{C}^2$. La démonstration est plus difficile...

Remarque - On peut utiliser la méthode de Newton avec un point de départ dans $]a, b[$, mais la convergence de la suite n'est pas garantie. En pratique, on utilise souvent la méthode de dichotomie pour trouver un x_0 assez proche de la racine.

5. Ordre de convergence

La convergence de la suite ne suffit pas numériquement, on aimerait avoir une estimation de la rapidité de convergence. On pose $e_n = x_n - \alpha$. e_n est l'erreur absolue au pas n. L'erreur relative vaut e_n/α.

Définition 6 – La méthode définie par $x_{n+1} = g(x_n)$ est dite d'ordre p si $\dfrac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p}$ a une limite non nulle en $+\infty$. La méthode de la sécante est donc d'ordre 1 si $g'(\alpha) \neq 0$, tandis que la méthode de Newton est d'ordre 2 si $g^{(2)}(\alpha) \neq 0$.

Définition 7 – Lorsque la méthode est d'ordre 1 (respectivement 2), on dit que la convergence est linéaire (respectivement quadratique).

APPROXIMATION D'UNE SOLUTION D'UNE ÉQUATION NON LINÉAIRE