Agrégation interne
UFR MATHÉMATIQUES

UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Les espaces vectoriels

1. Généralités

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ représente un corps commutatif.

1.1. Notion d'espace vectoriel

On considère un ensemble E sur lequel on suppose définies
- une loi de composition interne notée additivement $(+)$
- une loi de composition externe, notée multiplicativement $(.)$, de $\mathbb{K} \times E$ dans E.

Définition 1 – On dit que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ si

1) $(E, +)$ est un groupe abélien, c'est-à-dire :
   - $\forall (x, y, z) \in E^3,\ (x + y) + z = x + (y + z)$ (associativité)
   - $\forall (x, y) \in E^2,\ x + y = y + x$ (commutativité)
   - $\exists e \in E,\ \forall x \in E,\ x + e = x$ (élément neutre)
   - $\forall x \in E,\ \exists x' \in E,\ x + x' = e$ (symétrique)
2) $\forall (x, y) \in E^2,\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,$
   - $\lambda \,.\, (x + y) = \lambda \,.\, x + \lambda \,.\, y$
   - $(\lambda + \mu) \,.\, x = \lambda \,.\, x + \mu \,.\, x$
   - $\lambda \,.\, (\mu \,.\, x) = (\lambda\mu) \,.\, x$
   - $1 \,.\, x = x$ où 1 est l'élément neutre pour la multiplication de $\mathbb{K}$

Dans toute la suite, on notera 0 (ou 0_E si besoin) l'élément neutre pour la loi de composition interne et on l'appellera le vecteur nul. Le symétrique d'un élément x de E sera noté $-x$.

Exemples -

• Soit n un entier strictement positif. On considère les suites ordonnées de n éléments de $\mathbb{K}$: $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. L'ensemble de ces suites est noté $\mathbb{K}^n$. Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $x' = (x'_1, \dots, x'_n)$ deux éléments de $\mathbb{K}^n$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose :

$$x + x' = (x_1 + x'_1, \dots, x_n + x'_n) \text{ et } \lambda \,.\, x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

Muni de ces deux lois, $\mathbb{K}^n$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. En particulier, tout corps commutatif $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur lui-même.

• $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$.

• On note $\mathscr{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{K}$ dans $\mathbb{K}$.
On définit, sur $\mathscr{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$, une loi appelée *addition des applications*

$$+\begin{cases} \mathscr{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) \times \mathscr{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathscr{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) \\ (f, g) \longmapsto f + g \end{cases}$$

où $f + g$ est l'application définie par $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{K}$, et une loi appelée *multiplication par un scalaire* :

$$\times\begin{cases} \mathbb{K} \times \mathscr{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathscr{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) \\ (\lambda, f) \longmapsto \lambda f \end{cases}$$

où λf est l'application définie par $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ pour tout x dans E.
Muni de ces deux lois, l'ensemble $\mathscr{F}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

1.2. Quelques propriétés élémentaires

- $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \,.\, 0_E = 0_E$
- $\forall x \in E,\ 0 \,.\, x = 0_E$
- $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ (-\lambda) \,.\, x = -(\lambda \,.\, x)$
- $\lambda \,.\, x = 0 \iff (\lambda = 0 \text{ ou } x = 0_E)$

1.3. Notion de sous-espaces vectoriels

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition 2 – Une partie F de E est appelée sous-espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de E si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

1) $(F, +)$ est un sous-groupe de $(E, +)$
2) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in F,\ \lambda \,.\, x \in F$

Proposition 3 – Un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel est un espace vectoriel.

Démonstration : la loi de composition externe . est définie sur F et conserve les propriétés qu'elle a dans E. $\sqcup$

Proposition 4 – F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si F est non vide et vérifie : $\forall (x, y) \in F^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \lambda \,.\, x + \mu \,.\, y \in F$.

Démonstration : la condition nécessaire est évidente d'après la définition de sous espace vectoriel.
Supposons que $F \neq \emptyset$ vérifie la condition $\left[\forall (x, y) \in F^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \lambda \,.\, x + \mu \,.\, y \in F\right]$ et montrons que c'est un sous-espace vectoriel de E.
Soient x et y deux éléments de F. On a alors $1 \,.\, x - 1 \,.\, y \in F$ donc $(F, +)$ est un sous-groupe de $(E, +)$. En prenant $y = 0$ dans la condition vérifiée par F, on obtient bien la propriété 2 de la définition de sous-espace vectoriel. $\sqcup$

Lemme 5 – La condition $\forall (x, y) \in F^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2,\ \lambda \,.\, x + \mu \,.\, y \in F$ peut s'écrire $\forall (x, y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K},\ x + \lambda \,.\, y \in F$.

Proposition 6 – Toute intersection de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel.

Démonstration : montrons-le pour l'intersection de deux sous-espaces vectoriels. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Montrons que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.
$F \cap G$ est non vide car le vecteur nul de E appartient à F et à G. Soient $(x, y) \in (F \cap G)^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, alors $\lambda x + \mu y \in F$ car F est un sous-espace vectoriel de E. De même, $\lambda x + \mu y \in G$. Il s'ensuit que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E. $\sqcup$

1.4. Applications linéaires

Définition 7 – Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$ et f une application de E dans F. Dire que f est une application linéaire ou un morphisme signifie que les deux assertions suivantes sont vraies :

$$\begin{cases} \forall (x, y) \in E^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y) \\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in E, \quad f(\lambda x) = \lambda f(x) \end{cases}$$

Ces deux assertions peuvent être réunies en une seule :
$$\forall (x,y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(x+\lambda y) = f(x) + \lambda f(y).$$
On note $\mathscr{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F et $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans E.

Proposition 8 – $\mathscr{L}(E,F)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Proposition 9 – L'image par une application linéaire de $\mathscr{L}(E,F)$ d'un sous-espace vectoriel E' de E est un sous-espace vectoriel de F.

Démonstration : soit E' un sous-espace vectoriel de E et f une application linéaire de E dans F. Montrons que $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F.
$f(E')$ est non vide car E' est non vide. Soient y et y' deux éléments de $f(E')$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$. Montrons que $\lambda\,.\,y + \mu\,.\,y' \in f(E')$.

Par définition de $f(E')$, il existe x et x' dans E tels que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$. On obtient alors, en utilisant la linéarité de f, $\lambda\,.\,y+\mu\,.\,y' = \lambda\,.\,f(x)+\mu\,.\,f(x') = f(\lambda\,.\,x+\mu\,.\,x') \in F$.
$\sqcup$

Proposition 10 – L'image réciproque par une application linéaire de $\mathscr{L}(E,F)$ d'un sous-espace vectoriel F' de F est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration : soit F' un sous-espace vectoriel de F et et f une application linéaire de E dans F. Montrons que $f^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E.
Par définition, $f^{-1}(F') = \{x \in E\,;\ f(x) \in F'\}$. Soient x et x' deux éléments de $f^{-1}(F')$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$. Montrons que $\lambda\,.\,x + \mu\,.\,x' \in f^{-1}(F')$, ce qui revient à montrer que $f(\lambda\,.\,x+\mu\,.\,x') \in F'$. Or $f(\lambda\,.\,x+\mu\,.\,x') = \lambda\,.\,f(x)+\mu\,.\,f(x') \in F'$ car F' est un espace vectoriel ; d'où le résultat. $\sqcup$

2. Somme de sous-espaces - Somme directe

2.1. Sous-espace engendré par une famille

Définition 11 – Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On appelle combinaison linéaire des $(x_i)_{i\in I}$ tout élément de E de la forme $\sum\limits_{i\in I} \lambda_i\, x_i$ où $(\lambda_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ presque tous nuls.

Théorème 12 – Soit A une partie de E. Il existe un plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A : on l'appelle le sous-espace vectoriel engendré par A et on le note $\mathrm{Vect}(A)$.

Démonstration : soit F l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A. F est un espace vectoriel d'après la proposition 6 et c'est le plus petit pour l'inclusion par construction. $\sqcup$

Proposition 13 – Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille non vide d'éléments de E. Le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}\big((x_i)_{i\in I}\big)$ est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des $(x_i)_{i\in I}$.

Démonstration : soit E' l'ensemble des combinaisons linéaires des $(x_i)_{i\in I}$.
On a $E' \subset \mathrm{Vect}\big((x_i)_{i\in I}\big)$. Il suffit donc de montrer que E' est un sous-espace vectoriel de E pour montrer l'égalité car $\mathrm{Vect}\big((x_i)_{i\in I}\big)$ est, par définition, le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant la famille $(x_i)_{i\in I}$). E' est non vide car la famille est non vide.
Soient x et x' deux combinaisons linéaires des $(x_i)_{i\in I}$. Il existe une famille $(\lambda_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ presque tous nuls telle que $x = \sum_{i\in I} \lambda_i\, x_i$. Notons L le sous-ensemble de I tel que, si $i \in L$, $\lambda_i \neq 0$ et si $i \notin L$, $\lambda_i = 0$. Par définition, L est fini. De même, $x' = \sum_{i\in I} \lambda'_i\, x_i$ et L' est le sous-ensemble fini de I tel que, si $i \in L'$, $\lambda'_i \neq 0$ et si $i \notin L$, $\lambda'_i = 0$.

Soient μ et μ' deux éléments quelconques de $\mathbb{K}$. On a

$$\mu x + \mu' x' = \mu \sum_{i\in I} \lambda_i\, x_i + \mu' \sum_{i\in I} \lambda'_i\, x_i = \sum_{i\in I} (\mu\lambda_i + \mu'\lambda'_i) x_i.$$

Or la famille $(\mu\lambda_i + \mu'\lambda'_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ presque tous nuls car, si $i \in I \setminus (L \cup L')$, alors $\mu\lambda_i + \mu'\lambda'_i = 0$ et $L \cup L'$ est une famille finie. On en déduit que E' est un sous-espace vectoriel de E. $\sqcup$

2.2. Somme de sous-espaces vectoriels

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E.

Définition 14 – On appelle somme de E_1 et E_2 et on note $E_1 + E_2$ le sous-espace vectoriel engendré par $E_1 \cup E_2$.

Proposition 15 – $E_1 + E_2 = \{x_1 + x_2\,;\, x_1 \in E_1, x_2 \in E_2\}$.

Démonstration : $\{x_1 + x_2\,;\, x_1 \in E_1, x_2 \in E_2\} \subset E_1 + E_2$ car $x_i \in E_i \subset E_1 \cup E_2$ pour $i = 1$ et $i = 2$. Il suffit donc de montrer que $\{x_1 + x_2\,;\, x_1 \in E_1, x_2 \in E_2\}$ est un espace vectoriel, ce qui est clair. $\sqcup$

On définit de même par récurrence (et associativité de la loi additive sur E) la somme de n espaces vectoriels.

Définition 16 – On dit que deux sous-espace vectoriel E_1 et E_2 sont supplémentaires ou encore que E est somme directe de E_1 et E_2 si les deux assertions suivantes sont réalisées

1) $E = E_1 + E_2$
2) $E_1 \cap E_2 = \{0\}$

On note alors $E = E_1 \oplus E_2$.

Proposition 17 – E est somme directe de E_1 et E_2 si et seulement si
$$\forall x \in E,\ \exists!(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2,\ x = x_1 + x_2.$$

Démonstration : supposons $E = E_1 \oplus E_2$. Soit $x \in E$. Comme $E = E_1 + E_2$, il existe $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$ tels que $x = x_1 + x_2$.
Montrons que cette décomposition est unique. Soient $x'_1 \in E_1$ et $x'_2 \in E_2$ tels que $x = x'_1 + x'_2$. On a alors $x_1 + x_2 = x'_1 + x'_2$, c'est-à-dire $x_1 - x'_1 = x'_2 - x_2$. Or $x_1 - x'_1 \in E_1$ et $x'_2 - x_2 \in E_2$. On en déduit que $x_1 - x'_1 \in E_1 \cap E_2 = \{0\}$. Donc $x_1 = x'_1$ et, de même, $x_2 = x'_2$.

Réciproquement, supposons que, pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$ et montrons que $E = E_1 \oplus E_2$. Il est clair que $E = E_1 + E_2$. Soit $x \in E_1 \cap E_2$. On peut alors écrire $x = x + 0$ avec $x \in E_1$ et $0 \in E_2$, mais également $x = 0 + x$ avec $0 \in E_1$ et $x \in E_2$. L'unicité de la décomposition impose que $x = 0$. Donc $E = E_1 \oplus E_2$. $\sqcup$

Exemple - Soit $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions réelles. On note E_1 le sous-ensemble de E des fonctions paires et E_2 le sous-ensemble des fonctions impaires.
Alors E_1 et E_2 sont des sous-espace vectoriel de E et $E = E_1 \oplus E_2$. On a la décomposition unique :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = f_1(x) + f_2(x) \text{ avec } f_1 \in E_1 \text{ et } f_2 \in E_2.$$

Théorème 18 – Soient E_1, E_2, ..., E_n n sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) tout élément de E s'écrit de manière unique $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ avec, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $x_i \in E_i$.
ii) $E = E_1 + E_2 + \cdots + E_n$ et, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $E_i \cap \big(\sum_{j \neq i} E_j\big) = \{0\}$.

Si l'une de ces deux conditions est vérifiée, on dit que E est la somme directe des E_i et on écrit $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_n = \oplus_{i=1}^n E_i$.

Démonstration : montrons que $(i) \Longrightarrow (ii)$.
Soient $i \in \{1, \dots, n\}$ et $x \in E_i \cap \big(\sum_{j \neq i} E_j\big)$. On a $x = x + 0$ avec $x \in E_i$ et $0 \in \sum_{j \neq i} E_j$, mais aussi $x = 0 + x$ avec $0 \in E_i$ et $x \in \sum_{j \neq i} E_j$. Si $x \neq 0$, on obtient deux décompositions différentes de x sur $\sum E_i$. Absurde donc $x = 0$.
Réciproquement, montrons que $(ii) \Longrightarrow (i)$. Supposons que l'on ait deux décompositions d'un élément de E :

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = x'_1 + x'_2 + \cdots + x'_n$$

On a alors $x_1 - x'_1 = (x'_2 - x_2) + \cdots + (x'_n - x_n)$.
D'où $x_1 = x'_1$ et $(x'_2 - x_2) + \cdots + (x'_n - x_n) = 0$ car $E_1 \cap \big(\sum_{j=2}^n E_j\big) = \{0\}$. On montre alors le résultat par récurrence. $\sqcup$

Corollaire 19 – Soient E_1, E_2, …, E_n n sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1) $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_n$.
2) Si $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ avec $x_i \in E_i$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$, alors $x_i = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

2.3. Projecteurs

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition 20 – Dire qu'une application linéaire p de $\mathscr{L}(E)$ est un projecteur signifie que $p \circ p = p$.

Définition 21 – Dire qu'une famille de projecteurs $(p_i)_{i \in I}$ est orthogonale signifie que $p_i \circ p_j = 0$ pour tout indice i et j de I avec $i \neq j$.

Proposition 22 – Soient $E_1, \dots, E_n$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \oplus_{i=1}^n E_i$. On définit $p_1, \dots, p_n$ dans $\mathscr{L}(E)$ par :

$$p_i(x_1 + \cdots + x_n) = x_i \text{ avec } \forall i \in \{1, \dots, n\},\ x_i \in E_i.$$

Alors $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille orthogonale de projecteurs telle que

$$p_1 + \cdots + p_n = \mathrm{Id}_E. \tag{1}$$

Réciproquement, soit $(p_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille orthogonale de projecteurs qui vérifient (1). On pose $E_i = \mathrm{Im}\, p_i$. Alors E est la somme directe des E_i.

Démonstration : si $E = E_1 \oplus + \cdots \oplus E_n$, alors tout vecteur x de E s'écrit de manière unique $x = x_1 + \cdots + x_n$ avec $x_i \in E_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ donc $x_i = p_i(x)$. On a bien $p_1 + \cdots + p_n = Id_E$. Il est immédiat que $p_i \circ p_j = \delta_{ij} p_i$.
Réciproquement, si $p_1 + \cdots + p_n = Id_E$, alors E est la somme des E_i. Supposons qu'un élément x de E admette deux décompositions : $x = x_1 + \cdots + x_n = x'_1 + \cdots + x'_n$. Comme $x_i \in E_i$, il existe $y_i \in E$ tel que $x_i = p_i(y_i)$. On a $p_i(x_i) = x_i$ car $p_i \circ p_i = p_i$ et, si $j \neq i$,

$p_j(x_i) = 0$ et $p_i(x_j) = 0$ car la famille est orthogonale. On en déduit que $p_i(x) = x_i$. Les x_i sont donc déterminés de manière unique. $\sqcup$

3. Produit d'espaces vectoriels

Soient E_1 et E_2 2 espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Le produit $E_1 \times E_2$ est canoniquement muni de la structure d'espace vectoriel produit par

- la structure de groupe abélien produit $(E_1 \times E_2, +)$
- $\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2,\ \lambda . (x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$

On définit par récurrence le produit de n espaces vectoriels.

Définition 23 – Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$, on appelle $i$ème surjection canonique l'application p_i définie par

$$p_i : \begin{array}{l} E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n \to E_i \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto x_i \end{array}$$

Proposition 24 – Une surjection canonique p_i est une application linéaire.
$\operatorname{Im} p_i = E_i$.
$\operatorname{Ker} p_i = \{(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)\,;\, \forall j \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}, x_j \in E_j\}$.

Proposition 25 – $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n = \operatorname{Ker} p_1 \oplus \operatorname{Ker} p_2 \oplus \cdots \oplus \operatorname{Ker} p_n$.

4. Structure d'algèbre

Définition 26 – On dit qu'un espace vectoriel $(E, +, .)$ sur $\mathbb{K}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre s'il est muni d'une seconde loi de composition interne notée $\times$ telle que $(E, +, \times)$ soit un anneau et telle que $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (x, y) \in E^2,\ (\lambda . x) \times y = x \times (\lambda . y) = \lambda . (x \times y)$.

Exemple - $\mathbb{K}[X]$, $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

5. Notion de base

Définition 27 – Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E. Dire que cette famille est libre (ou que les x_i sont linéairement indépendants) signifie que, pour toute famille (λ_i) d'éléments de $\mathbb{K}$ presque tous nuls, si $\displaystyle\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$, alors, pour tout $i \in I, \lambda_i = 0$.
Dans le cas contraire, on dit que la famille est liée ou que les x_i sont linéairement dépendants.

Proposition 28 – Une famille $(x_i)_{i \in I}$ est liée si et seulement si l'un des x_i est combinaison linéaire des autres.

Démonstration : supposons la famille liée. Il existe donc une combinaison linéaire $\sum \lambda_i x_i$ nulle telle que les λ_i ne soient pas tous nuls. Soit i_0 tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$. On a alors $x_{i_0} = -\displaystyle\sum_{i \in I, i \neq i_0} \frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}} x_i$. Donc x_{i_0} est combinaison linéaire des autres x_i.
Réciproquement, supposons qu'un des x_i soit combinaison linéaire des autres : $x_{i_0} = \displaystyle\sum_{i \in I, i \neq i_0} \lambda_i x_i$. On a alors $x_{i_0} - \displaystyle\sum_{i \in I, i \neq i_0} \lambda_i x_i = 0$, donc la famille est liée. $\sqcup$

Remarques - • $\emptyset$ est considéré comme une famille libre.
• Si une famille est libre, alors $(i \neq j \Longrightarrow x_i \neq x_j)$.
• Si un des x_i est nul, alors la famille est liée.
• Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
• Toute sur-famille d'une famille liée est liée.

Définition 29 – Dire qu'une famille $(x_i)_{i\in I}$ est génératrice d'un espace vectoriel E signifie que $E = \text{Vect}\big((x_i)_{i\in I}\big)$.

Définition 30 – On dit qu'une famille $(x_i)_{i\in I}$ est une base de E si elle est libre et génératrice de E.

Théorème 31 – Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base d'un espace vectoriel E. Tout vecteur x de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des e_i : $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$.
Les λ_i sont appelées les coordonnées de x dans la base $(e_i)_{i\in I}$.

Démonstration : il y a existence de la combinaison linéaire car la famille est génératrice. Montrons l'unicité de la décomposition. Si $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i = \sum_{i\in I} \lambda'_i e_i$*, alors* $\sum_{i\in I} (\lambda_i - \lambda'_i) e_i = 0$*. Or la famille* (e_i) *est libre, donc* $\forall i \in I,\ \lambda_i = \lambda'_i$*.* $\sqcup$

Proposition 32 – 1 – Soit $E = E_1 \oplus E_2$. Si $(e_i)_{i\in I_1}$ est une base de E_1 et $(f_i)_{i\in I_2}$ est une base de E_2, alors $\{e_i\,;\, i \in E_i\} \cup \{f_i\,;\, i \in I_2\}$ est une base de E.
2 – Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base d'un espace vectoriel E. On suppose que $I = I_1 \cup I_2$ avec $I_1 \cap I_2 = \emptyset$. Notons $E_1 = \text{Vect}\big((e_i)_{i\in I_1}\big)$ et $E_2 = \text{Vect}\big((e_i)_{i\in I_2}\big)$.
Alors $E = E_1 \oplus E_2$.

6. Les espaces vectoriels de dimension finie

6.1. Définition

Définition 33 – Un espace vectoriel E est dit de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.

Lemme 34 – Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Soit $\{x_1, \ldots, x_k\}$ un système lié de k vecteurs. On suppose x_1 non nul. Alors il existe $i_0 \in \{2, \ldots, k$ tel que x_{i_0} soit combinaison linéaire de $x_1, \ldots, x_{i_0-1}$.

Démonstration : il existe une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls :
$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i = 0.$$
Soit $i_0 = \sup\{i\,;\, \lambda_i \neq 0\}$*. Alors* $i_0 > 1$ *et, si* $i > i_0$*,* $\lambda_i = 0$*. On en déduit que*
$$x_{i_0} = -\frac{1}{\lambda_{i_0}} \sum_{i=1}^{i_0-1} \lambda_i x_i.$$
$\sqcup$

Proposition 35 – Soit E un espace de dimension finie. Soit $\mathscr{S}$ un système de p générateurs de E et $\mathscr{L}$ un système libre de E. Alors

1) $\mathscr{L}$ est fini et son cardinal est inférieur ou égal à p ;
2) il existe une famille $\mathscr{T}$ de $\mathscr{S}$ telle que $\mathscr{L} \cup \mathscr{T}$ soit un système de p générateurs.

Démonstration : si $\mathscr{L} = \emptyset$*, c'est terminé.*

Sinon, soit $y_1 \in \mathscr{L}$. $y_1 \neq 0$ car la famille $\mathscr{L}$ est libre. De plus, comme la famille $\mathscr{S}$ est génératrice de E et que $y_1 \in E$, $\{y_1\} \cup \mathscr{S}$ est lié. Donc il existe $x_{i_1} \in \mathscr{S}$ combinaison linéaire de $y_1, x_1, \ldots, x_{i_1-1}$ d'après le lemme 34.
Posons $\mathscr{S}_1 = \mathscr{S} \setminus \{x_{i_1}\}$. $\mathscr{S}_1 \cup \{y_1\}$ est une famille de p générateurs de E.

Si $\operatorname{card} \mathscr{L} = 1$, c'est fini.
Sinon, il existe $y_2 \in \mathscr{L} \setminus \{y_1\}$ tel que $\{y_1, y_2\} \cup \mathscr{S}_1$ soit lié. Il existe donc $x_{i_2} \in \mathscr{S}_1$ combinaison linéaire de $y_1, y_2, x_1, \ldots, x_{i_2-1}$. Posons $\mathscr{S}_2 = \mathscr{S}_1 \setminus \{x_{i_2}\}$. $\{y_1, y_2\} \cup \mathscr{S}_2$ est une famille de p générateurs de E.
Si $\operatorname{card} \mathscr{L} \leq p-1$, on a : $\{y_1, y_2, \ldots, y_{p-1}\} \cup \mathscr{S}_{p-1}$ est un système de p générateurs de E.
Si $\operatorname{card} \mathscr{L} > p-1$, soit $y_p \in \mathscr{L} \setminus \{y_1, \ldots, y_{p-1}\}$. Alors le système $\{y_1, \ldots, y_p\} \cup \mathscr{S}_{p-1}$ est lié. Donc $\{y_1, \ldots, y_p\}$ est une famille de p générateurs de E.
Si $\operatorname{card} \mathscr{L} > p$. Il existe $y_{p+1} \in \mathscr{L} \setminus \{y_1, \ldots, y_p\}$. $\{y_1, \ldots, y_p, y_{p+1}\}$ est libre. Contradiction car y_1 est combinaison linéaire des $(y_i)_{1 \leq i \leq p}$. Donc $\operatorname{card} \mathscr{L} \leq p$. ⊔

Dans un espace de dimension finie, on a card(famille libre) $\leq$ card(famille liée).

Théorème 36 – Soit E un espace vectoriel non nul de dimension finie. Alors E admet une base finie.

Démonstration : soit $\mathscr{S} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ une famille de générateurs de E.
Si $\mathscr{S}$ est liée, l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres. On en déduit alors une famille $\mathscr{S}_1$ à $n-1$ vecteurs générateurs de E. Si $\mathscr{S}_1$ est libre, c'est une base.
Sinon, l'un des vecteurs de $\mathscr{S}_1$ est combinaison linéaire des autres. On construit alors une famille $\mathscr{S}_2$ de $n-2$ vecteurs générateurs de E. Si $\mathscr{S}_2$ est libre, c'est une base.
On réitère le procédé jusqu'à obtenir une famille libre. ⊔

Théorème 37 – Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments. Ce nombre est appelé dimension de E et est noté $\dim E$.

Démonstration : soit E un espace vectoriel de dimension finie. Il admet une base finie $\mathscr{B}$. Si $\mathscr{B}'$ est une autre base de E, alors, d'après le théorème 35, $\operatorname{card} \mathscr{B}' \leq \operatorname{card} \mathscr{B}$ car $\mathscr{B}'$ est libre. La base $\mathscr{B}'$ est donc finie. En utilisant encore le théorème 35, on a alors $\operatorname{card} \mathscr{B} \leq \operatorname{card} \mathscr{B}'$ car $\mathscr{B}$ est libre. ⊔

6.2. Théorème de la base incomplète

Théorème 38 – Dans un espace vectoriel de dimension finie, tout système libre peut se compléter en une base.

Démonstration : soit $\{y_1, \ldots, y_k\}$ une famille libre de E et $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E. On a $k \leq n$. D'après la proposition 35, il existe une sous-famille $\mathscr{T}$ de la famille $\{e_1, \ldots, e_n\}$ telle que $\{y_1, \ldots, y_k\} \cup \mathscr{T}$ soit un système de n générateurs. Ce système de générateurs est une base. En effet, s'il n'était pas libre, on en déduirait un système générateur à $n-1$ éléments, donc une base à $n-1$ éléments. Contradiction. ⊔

Proposition 39 – Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Toute famille génératrice de E admet une sous-famille génératrice finie.

Démonstration : soit $\{e_i\}_{i \in J}$ une famille génératrice de E. Comme E est de dimension finie, il admet une famille génératrice finie $\{f_1, \ldots, f_n\}$.
Chacun des f_j est combinaison linéaire finie des e_i et on peut donc trouver une partie finie K de J telle la famille $\{e_i\}_{i \in K}$ soit génératrice de E. ⊔

Théorème 40 – Théorème de la base incomplète

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $\{e_i\}_{i \in J}$ une famille génératrice quelconque de E. On suppose qu'il existe une partie I de J telle que la famille $\{e_i\}_{i \in I}$ soit libre.

Alors il existe un ensemble K tel que $I \subset K \subset J$ et tel que $\{e_i\}_{i\in K}$ soit une base de E.

Démonstration : d'après la proposition 39, il existe une partie J_0 avec $I \subset J_0 \subset J$ telle que $\{e_i\}_{i\in J_0}$ soit une famille génératrice finie de E.
Soit $B = \{K, I \subset K \subset J_0\,;\, \{e_i\}_{i\in K}$ famille libre$\}$.
B est un ensemble non vide car il contient I.
L'ensemble des cardinaux des éléments de B est donc majoré par $\operatorname{card} J_0$. Il admet donc un plus grand élément que l'on note p.
Soit $K_0 \in B$ tel que $\operatorname{card} B_0 = p$. Par définition de K_0, pour tout $K \subset J \setminus K_0$, la famille $\{e_i\}_{i\in K_0\cup K}$ est liée.
Supposons $\operatorname{Vect}(\{e_i\}_{i\in K_0}) \neq E$. Alors il existe $j \in J$ tel que $e_j \notin \operatorname{Vect}(\{e_i\}_{i\in K_0})$. Mais, d'après ce qui précéde, la famille $\{e_i\}_{i\in K_0\cup\{j\}}$ est liée. Absurde donc $\operatorname{Vect}(\{e_i\}_{i\in K_0}) = E$.
La famille $\{e_i\}_{i\in K_0}$ est donc génératrice de E ; or c'est une famille libre. C'est donc une base de E. $\sqcup$

Corollaire 41 – Soit E un espace vectoriel de dimension finie. De toute famille génératrice de E, on peut extraire une base de E.

Démonstration : il suffit de prendre $I = \emptyset$ dans le théorème 40. $\sqcup$

Théorème 42 – Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{S}$ une famille de vecteurs de E. Alors deux quelconques des assertions suivantes entraînent la troisième :

a) $\mathscr{S}$ est une famille génératrice ;
b) $\mathscr{S}$ est libre ;
c) $\operatorname{card} \mathscr{S} = n$.

Démonstration : (a et b) $\Rightarrow c$: évident
(a et c) $\Rightarrow b$: soit $\mathscr{S}$ une famille à n éléments génératrice de E. Si $\mathscr{S}$ n'est pas libre, alors on peut extraire de $\mathscr{S}$ une base ayant au plus $n-1$ éléments. Absurde.
(b et c) $\Rightarrow a$: soit $\mathscr{S}$ une famille libre à n éléments. Si $\mathscr{S}$ n'est pas génératrice, alors il existe $y \in E$ tel que $\mathscr{S} \cup \{y\}$ soit libre. Or tout système libre a au plus n éléments d'après le théorème 35. $\sqcup$

Proposition 43 – Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ et soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors les trois assertions suivantes sont vérifiées :

i) $\dim F \leq \dim E$;
ii) $\dim F = \dim E \Longleftrightarrow E = F$;
iii) F admet **au moins** un supplémentaire dans E.

Démonstration :

i) Soit $\mathscr{S}$ une base de F. $\mathscr{S}$ est libre dans F, donc également dans E. On en déduit que $\dim F = \operatorname{card} \mathscr{S} \leq n$.
ii) Supposons que $\dim F = \dim E$. Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de F. C'est une famille libre dans E ayant n éléments donc c'est une base de E. On en déduit que $E = F$.
iii) Soit $\{e_1, \ldots, e_p\}$ une base de F. D'après le théorème de la base incomplète, il existe $\{e_{p+1}, \ldots, e_n\}$ vecteurs de E tels que $\{e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n\}$ soit une base de E. On pose $G = \operatorname{Vect}(e_{p+1}, \ldots, e_n)$. G est un supplémentaire de F dans E.

$\sqcup$

Proposition 44 – Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Si F et G sont supplémentaires dans E, alors $\dim E = \dim F + \dim G$.

Démonstration : la réunion d'une base de F et d'une base de G est une base de E. $\sqcup$

Corollaire 45 – Tous les supplémentaires d'un sous-espace vectoriel F de E ont même dimension. On l'appelle la codimension de F.

6.3. Formule de Grassmann

Proposition 46 – Formule de Grassmann
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie. Alors
$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F\cap G).$$

Démonstration : $F+G$ est de dimension finie car la réunion d'une base de F et d'une base de G est une famille génératrice finie de $F+G$.
$F\cap G$ est un sous-espace vectoriel de F et de G. Notons $s=\dim(F\cap G)$, $p=\dim F$ et $q=\dim G$.
Soit $\{e_1,\dots,e_s\}$ une base de $F\cap G$ que l'on compléte en une base $\{e_1,\dots,e_s,f_1,\dots,f_{p-s}\}$ de F et en une base $\{e_1,\dots,e_s,g_1,\dots,g_{q-s}\}$ de G.
Le système $\{e_1,\dots,e_s,f_1,\dots,f_{p-s},g_1,\dots,g_{q-s}\}$ est un système générateur de $E+F$. Or c'est un système libre par construction donc $\dim(E+G)=p+q-s$. $\sqcup$

Corollaire 47 – Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimensions respectives p et $n-p$. Alors on a $E=F\oplus G$ si et seulement si $F\cap G=\{0\}$.

Définition 48 – Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. Dire que $\mathscr{S}$ est de rang r signifie que $\mathrm{Vect}\big((x_i)_{i\in I}\big)$ est de dimension r.

Proposition 49 – D'une famille de vecteurs de rang r, on peut extraire une famille de r vecteurs linéairement indépendants.

ESPACES VECTORIELS