Rappels sur les applications linéaires

1. Définition d'une application linéaire

Définition 1 – Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps $\mathbb{K}$ et f une application de E dans F. Dire que f est linéaire signifie que les deux assertions suivantes sont vraies :

$$\begin{cases} \forall (x,y) \in E^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y) \\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x \in E, \quad f(\lambda x) = \lambda f(x) \end{cases}$$

Ces deux assertions peuvent être réunies en une seule :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ f(x+\lambda y) = f(x) + \lambda f(y).$$

On note $\mathscr{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F et $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans E.

Proposition 2 – $\mathscr{L}(E,F)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Remarque - Si f est linéaire, alors $f(0_E) = 0_F$. (Faire $\lambda = 0$)

VOCABULAIRE - Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$.

- Un **endomorphisme** d'un espace vectoriel E est une application linéaire de E dans E.
- Un **isomorphisme** de E sur F est une application linéaire bijective.
- Un **automorphisme** est un endomorphisme bijectif.
- Une **forme linéaire sur** E est une application linéaire de E sur $\mathbb{K}$.

Soient E un espace de dimension finie n et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. L'application f est entièrement définie par l'image des vecteurs d'une base $(e_1,\dots,e_n)$ de E car, d'après la linéarité de f, si $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$, on a $f(x) = f(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) = x_1f(e_1) + \cdots + x_nf(e_n)$ pour tout x de E.

Exemples - • La dérivation et l'intégration sont des applications linéaires (attention au choix des ensembles de départ et d'arrivée)
• En géométrie vectorielle de dimension 2 ou 3, les rotations, symétries, homothéties et projections sont des applications linéaires.

On définit la loi $+$ sur $\mathscr{L}(E)$ comme étant la loi d'addition des fonctions, la loi $\times$ comme étant la multiplication par un scalaire, élément de $\mathbb{K}$, d'une fonction de $\mathscr{L}(E)$ et la loi $\circ$ comme étant la loi de composition de deux fonctions.

Proposition 3 – Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. $(\mathscr{L})(E), +, \times, \circ)$ est une algèbre sur $\mathbb{K}$.

Démonstration : en effet, $(\mathscr{L}(E), +, \times)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. La loi $\circ$ est une loi de compostion interne et est distributive par rapport à l'addition. On a de plus, pour tout $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ et pour tout $(f,g) \in \big(\mathscr{L}(E)\big)^2$, $(a \times f) \circ (b \times g) = (a \times b)(f \circ g)$ par linéarité. $\square$

2. Image et noyau

Proposition 4 – Soit $f : E \to F$ une application linéaire et G un sous-espace vectoriel de E. Alors $f(G)$ est un sous-espace vectoriel de F. En particulier, $f(E)$ est un sous-espace vectoriel de F, appelé image de f et noté $\operatorname{Im} f$.

Démonstration : soit G un sous-espace vectoriel de E. On a

$$f(G) = \{f(x)\,;\, x \in G\}.$$

C'est un sous-ensemble de F. Il est non vide car $0_E \in G$. En effet, G est un sous-espace vectoriel de E, donc $f(0_E) = 0_F \in f(G)$.
Soient y_1 et y_2 deux éléments de $f(G)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrons que $y_1 + \lambda y_2 \in f(G)$.
Par définition de $f(G)$, il existe x_1 et x_2, éléments de G tels que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$. On a alors

$$\begin{aligned} y_1 + \lambda y_2 &= f(x_1) + \lambda f(x_2) \\ &= f(x_1 + \lambda x_2) \text{ par linéarité de } f \end{aligned}$$

Or $x_1 + \lambda x_2 \in G$ car G est un espace vectoriel donc $y_1 + \lambda y_2 \in G$. □

Remarque - Si E est de dimension finie, on peut remarquer que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\{f(e_1), \ldots, f(e_n)\}$ où $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une famille génératrice (ou une base) de E. Pour définir une application linéaire sur E, il suffit donc de définir les images des vecteurs d'une base de E.

Définition 5 – Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. La dimension de $\operatorname{Im} f$ est appelée rang de f et est notée $\operatorname{rg} f$.

Proposition 6 – Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On pose

$$\operatorname{Ker} f = \{x \in E\,;\, f(x) = 0\}$$

où $0 = 0_F$.
$\operatorname{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de E appelé noyau de f.

Démonstration : $\operatorname{Ker} f$ est non vide car $f(0_E) = 0_F$.
Soient x_1 et x_2 deux éléments de $\operatorname{Ker} f$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrons que $x_1 + \lambda x_2 \in \operatorname{Ker} f$. On a $f(x_1 + \lambda x_2) = f(x_1) + \lambda f(x_2) = 0$. Donc $x_1 + \lambda x_2 \in \operatorname{Ker} f$. □

3. Injectivité, surjectivité et bijectivité

Proposition 7 – Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$.

Démonstration : comme $\operatorname{Im} f = f(E)$, le résultat est évident □

Proposition 8 – Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. f est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.

Démonstration : supposons f injective. Soit $x \in \operatorname{Ker} f$, alors $f(x) = 0 = f(0)$ donc $x = 0$ par définition de l'injectivité. On a donc $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.
Réciproquement, supposons que $\operatorname{Ker} f = \{0\}$. Soient x et y deux éléments de E tels que $f(x) = f(y)$. Par linéarité de f, on en déduit que $f(x - y) = 0$ donc $x - y \in \operatorname{Ker} f$. Or $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, d'où $x = y$ et f est injective. □

Proposition 9 – Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $\{v_i\}_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E.

a) Si f est injective et si la famille $\{v_i\}_{i \in I}$ est libre dans E , alors la famille $\{f(v_i)\}_{i \in I}$ est libre dans F.
b) Si f est surjective et si la famille $\{v_i\}_{i \in I}$ est génératrice de E, alors la famille $\{f(v_i)\}_{i \in I}$ est génératrice de F.
c) En particulier, si f est bijective, l'image d'une base de E est une base de F.

Démonstration :

– *Supposons f injective et soit $\{v_i\}_{i\in I}$ une famille libre d'éléments de E.*
Montrons que $\{f(v_i)\}_{i\in I}$ est une famille libre de F.
Soient $(\lambda_i)_{i\in I}$ des scalaires et J un sous-ensemble fini quelconque de I tels que

$$\sum_{i\in J}\lambda_i f(v_i) = 0, \text{ alors } f(\sum_{i\in J}\lambda_i v_i) = 0$$

On en déduit que $\sum_{i\in J}\lambda_i v_i \in \operatorname{Ker} f$; or f est injective donc $\sum_{i\in J}\lambda_i v_i = 0$. Comme la famille $\{v_i\}_{i\in J}$ est libre, la famille $\{v_i\}_{i\in J}$ l'est aussi et on en déduit que tous les λ_i sont nuls, d'où le résultat.

– *Supposons f surjective et soit $\{v_i\}_{i\in I}$ une famille génératrice de E. Montrons que la famille $\{f(v_i)\}$ est génératrice de F. Soit y un élément de F. Comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Or x s'écrit comme une combinaison linéaire des v_i, donc, par linéarité de f, $y = f(x)$ s'écrit comme une combinaison linéaire des $f(v_i)$.*

– *Une base étant une famille libre et génératrice et une application bijective étant injective et surjective, le troisième item est un corollaire des deux précédents.*

□

4. Théorème du rang

Théorème 11 – Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On a

$$\boxed{\dim E = \operatorname{rg} f + \dim(\operatorname{Ker} f)}$$

Démonstration : posons $\dim E = n$ et $\dim(\operatorname{Ker} f) = r$. Montrons alors que rg $f = n - r$.
Soit $\{w_1,\dots,w_r\}$ une base de $\operatorname{Ker} f$ et $\{v_1,\dots,v_{n-r}\}$ une famille de vecteurs de E telle que $\{w_1,\dots,w_r,v_1,\dots,v_{n-r}\}$ soit une base de E.
On pose $\mathscr{B} = \{f(v_1),\dots,f(v_{n-r})\}$. Montrons que $\mathscr{B}$ est une base de $\operatorname{Im} f$.

– *Montrons que $\mathscr{B}$ engendre $\operatorname{Im} f$.*
Soit $y = f(x) \in \operatorname{Im} f$. x s'écrit (de manière unique) $x = a_1w_1 + \cdots + a_rw_r + b_1v_1 + \cdots + b_{n-r}v_{n-r}$. En utilisant la linéarité de f et le fait que les w_i appartiennent à $\operatorname{Ker} f$, on obtient que y est combinaison linéaire des $f(v_i)$ donc $\mathscr{B}$ engendre $\operatorname{Im} f$.

– *Montrons que $\mathscr{B}$ est une famille libre de F.*
Soient $(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-r}) \in \mathbb{K}^{n-r}$ tel que $\lambda_1 f(v_1) + \cdots + \lambda_{n-r}f(v_{n-r}) = 0$. Par linéarité de f, on en déduit que $\lambda_1v_1 + \cdots + \lambda_{n-r}v_{n-r} \in \operatorname{Ker} f$ donc il existe $(\mu_1,\dots,\mu_r) \in \mathbb{K}^r$ tel que $\lambda_1v_1 + \cdots + \lambda_{n-r}v_{n-r} = \mu_1w_1 + \cdots + \mu_rw_r$. Comme la famille $(w_1,\dots,w_r,v_1,\dots,v_{n-r})$ est libre, on en déduit que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-r} = 0$ et $\mathscr{B}$ est libre.

□

Corollaire 12 – Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ où E et F sont deux espaces vectoriels de **même dimension finie**. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) f est injective
ii) f est surjective
iii) f est bijective

Démonstration : si f est bijective, alors elle est injective. On a alors $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ et, d'après le théorème du rang, $\dim E = $ rg $f = \dim \operatorname{Im} f$. Comme $\operatorname{Im} f \subset F$ et que $\dim E = \dim F$, on en déduit que $\operatorname{Im} f = F$ et f est surjective. De même, si f est surjective, alors $\dim E = $ rg f donc $\dim(\operatorname{Ker} f) = 0$ et $\operatorname{Ker} f = \{0\}$, ce qui veut dire que f est injective. Comme on l'a supposé surjective, on a montré qu'elle est bijective. □

Corollaire 13 – Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. On les équivalences suivantes :

$$f \text{ est bijective} \Longleftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{0\} \Longleftrightarrow \operatorname{Im} f = E.$$

5. Matrices associées aux applications linéaires

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie n et p respectivement.

Définition 14 – On appelle matrice de f dans les bases $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E et $\{f_1, \dots, f_p\}$ de F la matrice, notée $M(f)_{e_i,f_j}$, appartenant à $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont les composantes des vecteurs $f(e_1), \dots, f(e_n)$ dans la base $\{f_1, \dots, f_p\}$.

Posons $f(e_j) = a_{1j}f_1 + a_{2j}f_2 + \cdots + a_{pj}f_p$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$.
La matrice de f dans les bases $\{e_1, \dots, e_n\}$ de E et $\{f_1, \dots, f_p\}$ de F est alors la matrice

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_j) & \dots & f(e_n) \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pj} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} \end{array}$$

5.1. Écriture matricielle d'une application linéaire

Soit $x \in E$ avec $x = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j e_j$. On a

$$\begin{aligned} f(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) &= \sum_{j=1}^{n} \left(x_j \sum_{i=1}^{p} a_{ij} f_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) f_i \end{aligned}$$

Si on représente le vecteur x dans la base (e_i) par une matrice-colonne X et le vecteur y dans la base (f_j) par une matrice-colonne Y, on a alors

$$y = f(x) \Longleftrightarrow Y = AX \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pj} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ de dimension n et p respectivement, $\{e_i\}$ et $\{f_j\}$ des bases de E et F .

Proposition 15 – L'application

$$M : \left[\begin{array}{r} \mathscr{L}(E,F) \to \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ f \mapsto M(f)_{e_i,f_j} \end{array} \right.$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

On a donc, pour toutes les applications linéaires f et g de E dans F et tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} M(f+g) &= M(f) + M(g) \\ M(\lambda f) &= \lambda M(f) \end{aligned}$$

et M est bijective.

Proposition 16 – $\dim \mathscr{L}(E,F) = \dim E \times \dim F$

Démonstration : deux espaces isomorphes ont même dimension, d'où le résultat. □

Proposition 17 – Soient E, F et G trois espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K}$, $\{e_1,\dots,e_n\}$, $\{f_1,\dots,f_p\}$ et $\{g_1,\dots,g_q\}$ des bases de E, F et G respectivement. Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$, on a

$$\boxed{M(f\circ g)_{e_i,g_k} = M(f)_{f_j,g_k}\, M(g)_{e_i,f_j}}$$

Démonstration : posons

$$g(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} f_i \text{ d'où } M(g)_{e_i,f_j} = (a_{ij})_{1\le i\le n, 1\le j\le p} = A$$
$$f(f_i) = \sum_{k=1}^{q} b_{ki} g_k \text{ d'où } M(f)_{f_j,g_k} = (b_{jk})_{1\le j\le p, 1\le k\le q} = B$$

On va montrer que $M(f\circ g)_{e_i,g_k} = BA$ en calculant les coordonnées de $f\circ g(e_j)$ dans la base (g_k).

$$\begin{aligned} f\circ g(e_j) &= \sum_{i=1}^{p} a_{ij} f(f_i) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \left(a_{ij} \sum_{k=1}^{q} b_{ki} g_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^{q} \left(\sum_{i=1}^{p} b_{ki} a_{ij} \right) g_k \end{aligned}$$

La k-ème coordonnée du vecteur $f\circ g(e_j)$ est donc bien égale à $(BA)_{kj}$, d'où le résultat. □

Proposition 18 – Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension n sur $\mathbb{K}$. Soient $\{e_1,\dots,e_n\}$ et $\{f_1,\dots,f_n\}$ des bases de E et F respectivement.
Une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est bijective si et seulement si $M(f)_{e_i,f_j}$ est inversible. De plus,

$$\boxed{M(f^{-1})_{f_j,e_i} = \left(M(f)_{e_i,f_j}\right)^{-1}.}$$

Démonstration : c'est une conséquence de la proposition précédente. □ On a également, d'après le corollaire 13 qu'une matrice est inversible si et seulement si son noyau est réduit au vecteur nul ou encore si et seulement si ses vecteurs colonnes sont linéairement indépendants (puisqu'ils engendrent $\operatorname{Im} f$).

5.2. Matrice de passage

Soient E un espace vectoriel de dimension n et $\{e_1, \ldots, e_n\}$ et $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ deux bases de E.

Définition 19 – On appelle matrice de passage de la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ à la base $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ la matrice, notée $P_{\{e_i\} \to \{e'_i\}}$, dont les colonnes sont les composantes des vecteurs e'_i dans la base $\{e_i\}$. La matrice $P_{\{e_i\} \to \{e'_i\}}$ est la matrice de l'endomorphisme Id_E dans les bases $\{e_i\}$ et $\{e'_i\}$. On a donc :

Proposition 20 – La matrice de passage $P_{\{e_i\} \to \{e'_i\}}$ est inversible et son inverse est la matrice de passage $P_{\{e'_i\} \to \{e_i\}}$.

Soit $x \in E$ de composantes $(x_1, \ldots, x_n)$ dans la base $\{e_i\}$ et de composantes $(x'_1, \ldots, x'_n)$ dans la base $\{e'_i\}$. On note P la matrice de passage de la base $\{e_i\}$ à la base $\{e'_i\}$ et

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

Proposition 21 – $\boxed{X' = P^{-1}X}$

Démonstration : en effet, posons $P = (p_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. On a donc $e'_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$. D'où, si $x = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j$, on obtient

$$x' = \sum_{j=1}^{n} \left(x'_j \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j \right) e_i.$$

D'où $x_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j$, ce qui s'écrit $X = PX'$. On utilise ensuite l'inversibilité de P. □

5.3. Changement de base sur la représentation matricielle

Soient $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ et $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ deux bases de E et $\{f_1, \ldots, f_p\}$ et $\{f'_1, \ldots, f'_p\}$ deux bases de F.
On note

$$A = M(f)_{e_i, f_j}, A' = M(f)_{e'_i, f'_j}, P = P_{\{e_i\} \to \{e'_i\}} \text{ et } Q = P_{\{f_i\} \to \{f'_i\}}$$

Proposition 22 – $\boxed{A' = Q^{-1}AP}$

Démonstration : soit x un vecteur de E et $y = f(x)$. On note X (respectivement Y) la matrice-colonne des coordonnées de x (respectivement y) dans la base (e_i) (respectivement (f_j)) et X' (respectivement Y') la matrice-colonne des coordonnées de x (respectivement y) dans la base (e'_i) (respectivement (f'_j)).
On a $(Y = AX \iff Q^{-1}Y = Q^{-1}AX \iff Y' = Q^{-1}APY')$. Comme c'est vrai pour tout vecteur x de E, on en déduit le résultat. □

Corollaire 23 – Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\{e_1, \ldots, e_n\}$ et $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ deux bases de E. Notons

$$A = M(f)_{e_i}, A' = M(f)_{e'_i} \text{ et } P = P_{\{e_i\} \to \{e'_i\}}.$$

On a alors $\boxed{A' = P^{-1}AP}$.

Définition 24 – Deux matrices A et A' sont dites semblables s'il existe une matrice P de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ inversible telle que $A' = P^{-1}AP$.

Deux matrices semblables représentent donc le même endomorphisme dans deux bases différentes.

5.4. Rang d'une matrice

Définition 25 –

1) Soit $\mathscr{F} = \{v_i\}_{i\in I}$ une famille de vecteurs. On appelle rang de la famille $\{v_i\}$ la dimension de l'espace vectoriel engendré par cette famille.
2) Soit $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. On appelle rang de A le rang de la famille formée par les vecteurs colonnes de A.

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Soient $\{v_1,\dots,v_n\}$ et $\{w_1,\dots,w_p\}$ deux bases quelconques de E et F respectivement et $A = M(f)_{v_i,w_j}$.

Proposition 26 – $\boxed{\text{rg}\, f = \text{rg}\, A}$

Démonstration : Im f *est engendrée par les vecteurs-colonnes de la matrice* A*, d'où le résultat.* □

Proposition 27 – Deux matrices qui représentent la même application linéaire dans des bases différentes ont même rang ; en particulier, deux matrices semblables ont même rang.

Démonstration : soit $(e_1,\dots,e_n\}$ *et* $\{f_1,\dots,f_p\}$ *les bases canoniques de* $\mathbb{K}^n$ *et* $\mathbb{K}^p$ *respectivement. Considérons les deux isomorphismes* u *et* v *de* $\mathbb{K}^n$ *dans* E *et de* $\mathbb{K}^p$ *dans* F *définis respectivement par* $u(e_i) = v_i$ *et* $v(f_j) = w_j$.
L'application $h = v^{-1} \circ f \circ u$ *est représentée par la matrice* A *dans les bases canoniques. On a donc* $\text{rg}\, A = \dim(\text{Vect}\{h(e_1),\dots,h(e_n)\}) = \dim \text{Im}\, h = \text{rg}\, h$.
D'autre part, puisque u *et* v *sont bijectifs,* $\text{rg}\, h = \text{rg}\, f$. □

Remarque - Pour toute matrice A, on a $\text{rg}\, A = \text{rg}\, {}^tA$. Il s'ensuit que le rang d'une matrice est aussi égal au rang de la famille des vecteurs lignes.

6. Trace d'un endomorphisme

Dans tout ce paragraphe, on se place sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n.

Définition 28 – Soit A une matrice carrée d'ordre n. On appelle trace de A et on note tr(A), la somme des coefficients diagonaux de A.
On vérifie que l'application trace ainsi définie est linéaire et que tr$({}^tA)$=tr(A).

Lemme 29 – Pour toutes les matrices A et B carrées d'ordre n, on a tr(AB)=tr(BA).

Démonstration :

$$\begin{aligned} tr(AB) &= \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ik} \right) = tr(BA) \end{aligned}$$

□

Soient $\{e_1,\dots,e_n\}$ et $\{e'_1,\dots,e'_n\}$ deux bases de E et $u \in \mathscr{L}(E)$.
Notons $A = M(u)_{e_i}, A' = M(u)_{e'_i}$ et $P = P_{\{e_i\}\to\{e'_i\}}$. On a alors $A' = P^{-1}AP$, donc tr(A')=tr$\big((P^{-1}A)P\big)$=tr$\big(P(P^{-1}A)\big)$=tr(A). Ceci justifie la définition suivante :

Définition 30 – Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On définit la trace de u, notée tr(u), comme étant la trace de la matrice représentative de u dans une base quelconque de E.

7. Espace dual

Dans tout ce paragraphe, on se place sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.

7.1. Hyperplans

Définition 31 – On appelle forme linéaire sur E une application linéaire $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$. L'ensemble des formes linéaires sur E est noté E^* et est appelé espace dual de E.

Proposition 32 – Soit E de dimension finie n et $f \in E^*$ une forme linéaire non nulle. On a $\dim \operatorname{Ker} f = n - 1$. Le noyau de f est appelé hyperplan de E déterminé par f.

Démonstration : on a $\dim(\operatorname{Im} f) \leq \dim \mathbb{K} = 1$*. Puisque* $f \neq 0$*, on a* $\dim \operatorname{Im} f = 1$ *et, d'après le théorème du rang,* $\dim \operatorname{Ker} f = n - 1$*.* □

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E. La matrice d'une forme linéaire sur E est représentée par une matrice ligne :

$$M(f)_{e_i,1} = (a_1, \ldots, a_n).$$

Soit $x \in E$. Posons $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$, on a alors $f(x) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$.

L'hyperplan déterminé par f est donc l'ensemble des vecteurs x de E dont les composantes vérifient l'équation linéaire :

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0.$$

L'espace des solutions d'un système d'équations linéaires peut donc être vu comme une intersection d'hyperplans.

Proposition 33 – Soit H un sous-espace vectoriel de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) H est le noyau d'une forme linéaire non nulle ;
ii) il existe une droite D de E telle que $E = H \oplus D$.

Démonstration : supposons (i) *vraie et montrons* (ii) *est vraie. Soit* $H = \operatorname{Ker} \varphi$ *où* φ *est une forme linéaire non nulle. Il existe donc* $u \in E$ *tel que* $\varphi(u) \neq 0$*. Posons* $D = \operatorname{Vect}\{u\}$*.*
On a $H \cap D = \{0\}$ *par construction. Montrons que* $E = D + H$*. On a* $D + H \subset E$*. Soit* $x \in E$*. Déterminons s'il existe* $\lambda \in \mathbb{K}$ *tel que* $x - \lambda u \in H$*. On aurait alors* $\varphi(x - \lambda u) = 0$*, c'est-à-dire* $\lambda = \varphi(x)/\varphi(u)$ *(rappelons que* $\varphi(u) \neq 0$*). On a alors* $x = (x - \lambda u) + \lambda u$ *avec* $x - \lambda u \in H$ *et* $\lambda u \in D$*.*
Réciproquement, supposons (ii) *vraie et montrons que* (i) *est vraie. On a* $E = D \oplus H$ *où* D *est une droite vectorielle. Soit* p *la projection sur* D *parallélement à* H*. Soit* u *un vecteur directeur de* D*. On définit une application par*

$$\varphi : \left[\begin{array}{l} E \to \mathbb{K} \\ x \mapsto \lambda \end{array}\right. \quad \textit{avec } \lambda \textit{ définie par } p(x) = \lambda u$$

On vérifie que cette application est bien linéaire (par linéarité de la projection). On a bien $H = \operatorname{Ker} \varphi$ *où* φ *est une forme linéaire non nulle.* □

Proposition 34 – Deux formes linéaires non nulles sont liées si et seulement si elles ont même noyau.

Démonstration : soient φ *et* ψ *deux formes linéaires non nulles.*
Si $\psi = \lambda\varphi$ *avec* $\lambda \neq 0$*, alors il est évident que* $\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Ker} \psi$*. Réciproquement, supposons que* $\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Ker} \psi$*. Notons* H *cet hyperplan. Il existe une droite* D *telle que* $E = H \oplus D$*. Soit* u *un vecteur directeur de* D *et* $\lambda = \psi(u)/\varphi(u)$*.*
Si $x \in D$*, alors* $x = \alpha u$ *donc* $\psi(x) = \alpha\psi(u) = \alpha\lambda\varphi(u) = \lambda\varphi(x)$*.*
Si $x \in H$*, alors* $\psi(x) = 0 = \lambda\varphi(x)$*.*
Comme $E = H \oplus D$*, on en déduit que* $\varphi = \lambda\psi$*.* □

7.2. Base duale

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$.
Puisque $\dim \mathscr{L}(E, \mathbb{K}) = \dim E \times \dim \mathbb{K} = \dim E$, on a la

Proposition 35 – Si E est de dimension finie, alors $\dim E^* = \dim E$ et par conséquent E et E^* sont isomorphes.

Plus précisément, si l'on choisit une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de E, on peut construire canoniquement une base de E^*.

Théorème 36 – Soit E de dimension finie n et $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E.
Considérons les formes linéaires $\{f_1, \ldots, f_n\}$ définies par $f_i(e_k) = \delta_{ik}$ où

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases} \quad (\delta_{ik} \text{ est appelé symbole de Kronecker}).$$

Alors $\{f_1, \ldots, f_n\}$ est une base de E^* appelée base duale de $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

Démonstration : les applications f_i sont entièrement définies puisque l'on connaît l'image des vecteurs d'une base de E. Pour montrer que $\{f_1, \ldots, f_n\}$ est une base de E^*, il suffit de montrer que c'est un système libre car on sait que $\dim E^* = \dim E = n$.
Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_n f_n = 0$.
On a donc, pour tout vecteur e_k de la base donnée de E :

$$\lambda_1 f_1(e_k) + \cdots + \lambda_n f_n(e_k) = 0$$

c'est-à-dire $\lambda_k = 0$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$. On a montré que la famille $\{f_1, \ldots, f_n\}$ est libre.
□

Notation : la base duale de la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est notée $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$.

Remarque - Si $x = \sum_{j=1}^{n} x_j\, e_j$, alors $e_i^*(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j e_i^*(e_j) = x_i$.

Proposition 37 – Soient $\{f_1, \ldots, f_p\}$ un système de formes linéaires sur un espace vectoriel E de dimension finie. Alors

$$\boxed{\dim \left(\bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker} f_i \right) = \dim E - \operatorname{rang} \{f_1, \ldots, f_p\}}.$$

Démonstration : soient $n = \dim E$, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E et $\{e_1^*, \ldots, e_n^*\}$ la base duale associée. On peut écrire

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j^*.$$

Soit $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$. Posons $u(x) = \sum_{i=1}^{p} f_i(x)\varepsilon_i$ et calculons $u(e_j)$.

$$u(e_j) = \sum_{i=1}^{p} f_i(e_j)\varepsilon_i = \sum_{i=1}^{p} a_{ij}\varepsilon_i.$$

Donc $M(u)_{e_i, \varepsilon_j} = A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n}$. On a donc $\operatorname{rang} u = \operatorname{rang} A$. Or ${}^tA$ est la matrice dont les vecteurs colonnes sont les coordonnées des f_i dans la base $\{e_i^*\}$. On en déduit que $\operatorname{rang} u = \operatorname{rang} \{f_1, \ldots, f_n\}$
D'après le théorème du rang, $\operatorname{rang} u = \dim E - \dim \operatorname{Ker} u$. On montre que $\operatorname{Ker} u = \cap_i \operatorname{Ker} f_i$, d'où le résultat. □

Proposition 38 – Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Pour toute base $\{f_i\}$ de E^*, il existe une unique base de E dont la base duale est la base des $\{f_i\}$

Démonstration : soit φ l'application de E dans $\mathbb{K}^n$ qui à x associe $(f_1(x), \ldots, f_n(x))$. On montre que φ est un isomorphisme (même dimension d'espaces + injectivité en utilisant la proposition précédente), donc il existe une unique famille $\{e_i\}$ de E telle que $\varphi(e_i) = (\delta_{1i}, \ldots, \delta_{ni})$. C'est l'image d'une base par φ^{-1} donc c'est une base de E. On a bien $f_j(e_i) = \delta_{ji}$ □

Corollaire 39 – Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. On considère n vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ de E et n formes linéaires $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ de E^*.
On suppose que

$$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2,\ \varphi_j(e_i) = \delta_{ij}.$$

Alors $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ est une base de E^*, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base de E et $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ est la base duale de $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

Démonstration : montrons que le système $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ est libre. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ n scalaires tels que $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \varphi_j = 0$. En appliquant cette égalité de fonctions à e_i, on obtient que $\lambda_i = 0$. Or ceci est vrai pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, donc le système est libre. C'est un système libre de n vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n car $\dim E = \dim E^*$. On en déduit que c'est une base de E^*.
De même, montrons que le système $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est libre. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ n scalaires tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$. On a alors $\varphi_j(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_j(e_i) = \lambda_i = 0$. Or ceci est vrai pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, donc le système est libre. C'est un système libre de n vecteurs de l'espace vectoriel E de dimension n. On en déduit que c'est une base de E.
Les égalités $\varphi_j(e_i) = \delta_{ij}$ montrent que $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ est la base duale de $\{e_1, \ldots, e_n\}$. □

Exemple - Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$ et a_0, $a1, \ldots, a_n$ $n+1$ réels distincts deux à deux. On définit les polynômes P_0, $P_1, \ldots, P_n$ de Lagrange par

$$\forall i \in \{0, \ldots, n\},\ P_i(X) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \left(\frac{X - a_j}{a_i - a_j}\right)$$

On a $P_i(a_j) = \delta_{ij}$. On en déduit que les polynômes de Lagrange forment une base de $\mathbb{R}_n[X]$. En effet, considérons les $n+1$ formes linéaires

$$\varphi_j : \left[\begin{array}{l} \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R} \\ \quad P \mapsto P(a_j) \end{array}\right.$$

On a, pour tout $(i,j) \in \{0, \ldots, n\}$, $\varphi_j(a_i) = \delta_{ij}$ et on peut utiliser le corollaire précédent.

7.3. Bidual

Comme E^* est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, on peut considérer l'ensemble des formes linéaires sur E^*, c'est-à-dire le dual de E^*, appelé bidual : $E^{**} = \mathscr{L}(E^*, \mathbb{K})$. En dimension finie, on a $\dim E^{**} = \dim E^* = \dim E$. Donc E^{**} est isomorphe à E.

Proposition 40 – En dimension finie, E^{**} est canoniquement isomorphe à E.

Ceci veut dire que l'on peut construire un isomorphisme de E sur E^{**} sans faire appel à des choix de bases. *Démonstration : soit l'application $\varphi : \left[\begin{array}{l} E \to E^{**} \\ x \mapsto \varphi_x \end{array}\right.$ où $\varphi_x : \left[\begin{array}{l} E^* \to \mathbb{K} \\ \ f \mapsto f(x) \end{array}\right.$. Montrons d'abord que l'on a bien $\varphi_x \in E^{**}$, c'est-à-dire que $\varphi_x \in \mathscr{L}(E^*, \mathbb{K})$.*

On a, pour f_1, f_2 dans E^* :

$$\varphi_x(f_1 + f_2) = (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi_x(f_1) + \varphi_x(f_2)$$

et, si $f \in E^*$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\varphi_x(\lambda f) = (\lambda f)(x) = \lambda f(x) = \lambda \varphi_x(f).$$

Donc $\varphi_x \in E^{**}$.
Montrons maintenant que φ est linéaire.
Soient $(x, y) \in E^2$ et $f \in E^*$, on a

$$\varphi_{x+y}(f) = f(x + y) = f(x) + f(y) = \varphi_x(f) + \varphi_y(f) = (\varphi_x + \varphi_y)(f)$$

donc $\varphi_{x+y} = \varphi_x + \varphi_y$. De même, si $\lambda \in \mathbb{K}$, on a pour $f \in E^*$,

$$\varphi_{\lambda x}(f) = f(\lambda x) = \lambda f(x) = \lambda \varphi_x(f)$$

c'est-à-dire $\varphi_{\lambda x} = \lambda \varphi_x$. L'application φ est donc linéaire.
Il reste à montrer que φ est bijective. Comme $\dim E^* = \dim E$, il suffit de montrer qu'elle est injective. Soit $x \in E$ tel que $\varphi_x = 0$. Alors, pour $f \in E^*$, $\varphi_x(f) = 0$. Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de E et $\{f_1, \ldots, f_n\}$ la base duale. On a $\varphi_x(f_i) = 0$, c'est-à-dire $f_i(x) = 0$. Or, par définition d'une base duale, on a, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $f_i(x) = x_i$ où x_i est la i-ème composante de x dans la base $\{e_i\}$. On en déduit que $x = 0$ et φ est injective. □

Remarque - En dimension infinie, on peut montrer que φ est injectif, mais il n'est pas nécessairement surjectif. Donc, si la dimension est infinie, E n'est en général pas isomorphe à E^{**}, mais uniquement à son image par φ.

7.4. Sous-espaces orthogonaux

Proposition 41 – Soit E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. L'ensemble $F^\perp$ des formes linéaires qui s'annulent sur tous les vecteurs de F :

$$\boxed{F^\perp = \{f \in E^*\,;\, \forall v \in F, f(v) = 0\}}$$

est un sous-espace vectoriel de E^* appelé orthogonal de F.

Remarque - En dimension finie, en utilisant la linéarité, on montre que, si $\{e_1, \ldots, e_p\}$ est une base de F, alors

$$\boxed{F^\perp = \{f \in E\,;\, f(e_1) = \cdots = f(e_p) = 0\}.}$$

Proposition 42 – Soit E de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. On a

$$\boxed{\dim E = \dim F + \dim F^\perp}$$

Démonstration : soit $n = \dim E$ et soit $\{e_1, \ldots, e_p\}$ une base de F. Complétons-la en une base de E : $\mathscr{B} = \{e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n\}$. Soit $\{f_1, \ldots, f_p, f_{p+1}, \ldots, f_n\}$ la base duale. Montrons que $\{f_{p+1}, \ldots, f_n\}$ est une base de $F^\perp$, ce qui prouvera le résultat.
Pour tout $k \in \{p + 1, \ldots, n\}$, on a $f_k(e_1) = 0, \ldots, f_k(e_p) = 0$ par définition d'une base duale, ce qui montre que $f_k \in F^\perp$.
La famille $\{f_{p+1}, \ldots, f_n\}$ est libre en tant que sous-famille d'une base. Montrons qu'elle engendre $F^\perp$.
Soit $f \in F^\perp$. Soit $x = x_1e_1 + \cdots + x_pe_p + x_{p+1}e_{p+1} + \cdots + x_ne_n$ un vecteur de E. On a $f(x) = x_{p+1}f(e_{p+1}) + \cdots + x_nf(e_n)$ car $f \in F^\perp$. Si on pose $\lambda_j = f(e_j)$ pour tout $j \in \{p + 1, \ldots, n\}$, on obtient que, pour tout $x \in E$,

$$f(x) = \lambda_{p+1}x_{p+1} + \cdots + \lambda_nx_n = \lambda_{p+1}f_{p+1}(x) + \cdots + \lambda_nf_n(x)$$

car $\{f_i\}$ est la base duale de $\{e_i\}$ et donc $f_i(x) = x_i$. On a donc montré que, pour tout $f \in F^\perp$, il existe $(\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n-p}$ tel que $f = \lambda_{p+1}f_{p+1} + \cdots + \lambda_nf_n$ et donc que la famille $\{f_{p+1}, \ldots, f_n\}$ engendre $F^\perp$. □

Proposition 43 – Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E de dimension finie. On a

$$\boxed{x \in F \iff \forall f \in F^{\perp},\ f(x) = 0}$$

Démonstration : par définition de $F^{\perp}$, on sait que, si $x \in F$, alors, pour tout $f \in F^{\perp}$, $f(x) = 0$. On considère $\{e_1, \ldots, e_p\}$ une base de F que l'on complète en une base de E :

$$\{e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n\}.$$

On a montré que $\{e^*_{p+1}, \ldots, e^*_n\}$ est une base de $F^{\perp}$. Soit $x \in E$. Alors $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Supposons que, pour tout $f \in F^{\perp}$, $f(x) = 0$ et montrons que $x \in F$. En particulier, pour tout $i \in \{p+1, \ldots, n\}$, $e^*_i(x) = 0$. Or $e^*_i(x) = x_i$. On en déduit que $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$, donc $x \in F$.

□

Proposition 44 – Soient E et F deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie. On a

$$\boxed{F \subset G \iff G^{\perp} \subset F^{\perp}.}$$

Démonstration : supposons que $F \subset G$. Soit $g \in G^{\perp}$. Alors, pour tout $x \in G$, $g(x) = 0$. Or $F \subset G$, donc pour tout $x \in F$, $g(x) = 0$. On en déduit que $g \in F^{\perp}$. (Remarque : la dimension finie de E n'intervient pas dans cette implication)

Réciproquement, supposons que $G^{\perp} \subset F^{\perp}$. Soit $x \in F$. Alors, pour tout $f \in F^{\perp}$, $f(x) = 0$. En particulier, comme $G^{\perp} \subset F^{\perp}$, pour tout $f \in G^{\perp}$, $f(x) = 0$. On en déduit, avec la proposition précédente, que $x \in G$. □

Proposition 45 – Soient F et G deux sous-espaces d'un espace vectoriel de dimension finie. Alors

$$\boxed{(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp} \text{ et } (F + G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}}$$

Démonstration : montrons que $(F \cap G)^{\perp} = F^{\perp} + G^{\perp}$.

Soit $f \in (F \cap G)^{\perp}$. Alors, pour tout $x \in F \cap G$, on a $f(x) = 0$.

Soit F' (respectivement G') un supplémentaire de $F \cap G$ dans F (respectivement G). On a alors $(F \cap G) + F' + G' = (F \cap G) \oplus F' \oplus G'$. Notons C ce sous-espace et C' un supplémentaire de C dans E. Tout élément x de E s'écrit $x = x_{F\cap G} + x_{F'} + x_{G'} + x_{C'}$ et on a $f(x) = f(x_{F'}) + f(x_{G'}) + f(x_{C'})$ car $f(x_{F\cap G}) = 0$.

Posons $f_1(x) = f(x_{F'})$ et $f_2(x) = f(x_{G'}) + f(x_{C'})$. On a $f = f_1 + f_2$. De plus, si $x \in F$, alors $f_2(x) = 0$ et si $x \in G$, alors $f_1(x) = 0$. On a donc $f = f_1 + f_2$ avec $f_1 \in G^{\perp}$ et $f_2 \in F^{\perp}$, c'est-à-dire $f \subset F^{\perp} + G^{\perp}$.

Réciproquement, soit $f \in F^{\perp} + G^{\perp}$. On a $f = f_1 + f_2$ avec $f_1 \in F^{\perp}$ et $f_2 \in G^{\perp}$. Soit $x \in F \cap G$, montrons que $f(x) = 0$. On a $f(x) = f_1(x) + f_2(x) = 0$ car $f_1(x) = 0$ (respectivement $f_2(x) = 0$) puisque $x \in F$ (respectivement $x \in G$).

Montrons que $(F + G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.

Soit $f \in (F + G)^{\perp}$. Alors, pour tout $x \in F \subset F + G$, $f(x) = 0$ donc $f \in F^{\perp}$ et pour tout $x \in G \subset F + G$, $f(x) = 0$ donc $f \in G^{\perp}$. On en déduit que $f \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$.

Réciproquement, soit $f \in F^{\perp} \cap G^{\perp}$. Comme $f(x) = 0$ pour tout $x \in F$ et $f(y) = 0$ pour tout $y \in G$, on a $f(x + y) = 0$ pour tout $z = x + y \in F + G$. On a montré que $f \in (F + G)^{\perp}$. □

8. Application transposée

8.1. Définition

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$.

Définition 46 – On appelle application transposée de φ et on note ${}^t\varphi$ l'application définie par

$${}^t\varphi : \left[\begin{array}{l} F^* \to E^* \\ \quad f \mapsto f \circ \varphi \end{array}\right.$$

Proposition 47 – Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$. On a

$$\boxed{(\operatorname{Im}\varphi)^\perp = \operatorname{Ker}({}^t\varphi) \text{ et } (\operatorname{Ker}\varphi)^\perp = \operatorname{Im}({}^t\varphi)}$$

Démonstration : 1) Montrons que $(\operatorname{Im}\varphi)^\perp = \operatorname{Ker}({}^t\varphi)$

Si $f \in (\operatorname{Im}\varphi)^\perp$*, alors* $\varphi(f) = 0 = f \circ \varphi$*. Donc* $f \in \operatorname{Ker}({}^t\varphi)$*.*
Réciproquement, si $f \in \operatorname{Ker}({}^t\varphi)$*, alors* $\varphi(f) = 0$*. Donc* $f \in (\operatorname{Im}\varphi)^\perp$*.*

2) Montrons maintenant que $(\operatorname{Ker}\varphi)^\perp = \operatorname{Im}({}^t\varphi)$*.*

Soit $g \in \operatorname{Im}({}^t\varphi)$*. Alors il existe* $f \in F^*$ *telle que* $g = f \circ \varphi$*. Si* $x \in \operatorname{Ker}\varphi$*, alors* $g(x) = f\big(\varphi(x)\big) = 0$ *donc* $g \in (\operatorname{Ker}\varphi)^\perp$*.*
Réciproquement, soit $f \in (\operatorname{Ker}\varphi)^\perp$*. Alors, pour tout* $x \in \operatorname{Ker}\varphi$*,* $f(x) = 0$*. On veut montrer que* $f \in \operatorname{Im}({}^t\varphi)$*, c'est-à-dire qu'il existe* $u \in F^*$ *tel que* $f = {}^t\varphi(u) = u \circ \varphi$*.*
Posons $E_1 = \operatorname{Ker}\varphi$ *et* $F_1 = \operatorname{Im}\varphi$*. Soient* E_2 *un supplémentaire de* E_1 *dans* E *et* F_2 *un suppplémentaire de* F_1 *dans* F*. D'après le théorème du rang, on a* $\dim E_2 = \dim \operatorname{Im}\varphi$*. L'application* θ *définie par*

$$\theta : \left[\begin{array}{l} E_2 \to \operatorname{Im}\varphi = F_1 \\ \quad x \mapsto \varphi(x) \end{array}\right.$$

est bijective (car elle est injective par construction et les espaces de départ et d'arrivée ont même dimension).
Pour définir u*, il suffit de définir* $u(y_1)$ *pour tout* y_1 *dans* F_1 *et* $u(y_2)$ *pour tout* y_2 *dans* F_2 *car* $F = F_1 \oplus F_2$*.*
Posons $u(y_1) = f\big(\theta^{-1}(y_2)\big)$ *et* $u(y_2) = 0$*.*
Pour tout x *dans* E*, il existe* $x_1 \in E_1$ *et* $x_2 \in E_2$ *uniques tels que* $x = x_1 + x_2$ *et on a*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_2) \text{ car } f \in (\operatorname{Ker}\varphi)^\perp \text{ et} \\ u\big(\varphi(x)\big) &= u\big(\varphi(x_2)\big) \text{ or } \varphi(x_2) \in F_1 \text{ donc} \\ u\big(\varphi(x)\big) &= f\Big(\theta^{-1}\big(\varphi(x_2)\big)\Big) = f(x_2) \text{ par définition de } \theta. \end{aligned}$$

On a alors prouvé le résultat. □

8.2. Lien entre application transposée et transposée d'une matrice

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies respectives n et p et $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$. Soient $\{e_1,\dots,e_n\}$ une base de E et $\{f_1,\dots,f_p\}$ une base de F. On note $\{e_1^*,\dots,e_n^*\}$ et $\{f_1^*,\dots,f_p^*\}$ les bases duales correspondantes.

Proposition 48 – On a $\boxed{M\big(\varphi,(e_i),(f_j)\big) = {}^tM\big({}^t\varphi,(f_j^*),(e_i^*)\big).}$

Démonstration : posons $\varphi(e_i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{ij} f_j$*. Le but est de montrer que* ${}^t\varphi(f_i^*) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j^*$*.*

Soit $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ *un élément quelconque de* E*. On a*

$$\begin{aligned} {}^t\varphi(f_i^*)(x) = f_i^* \circ \varphi(x) &= f_i^* \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \varphi(e_j) \right) \\ &= f_i^* \left(\sum_{j=1}^{n} x_j (\sum_{k=1}^{p} a_{jk} f_k) \right) = \sum_{j=1}^{n} x_j (\sum_{k=1}^{p} a_{jk} f_i^*(f_k)) \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j a_{ji} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j^*(x). \end{aligned}$$

Comme l'égalité est vraie pour tout x *de* E*, on en déduit le résultat.* □

9. Quelques applications de la dualité

9.1. Nombre d'équations pour déterminer un sev de dimension p

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

Proposition 49 – Trouver des équations d'un sous-espace vectoriel F de E, c'est trouver $n-p$ formes linéaires indépendantes qui engendrent $F^\perp$.

On a montré que

$$x \in F \iff \forall f \in F^\perp, \ f(x) = 0$$

On sait également que $\dim F^\perp = n - p$.
Soient alors $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de E et $\{f_1, \dots, f_{n-p}\}$ une base de $F^\perp$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n-p\}$, il existe $(a_{ij})_{1 \le j \le n}$ dans $\mathbb{K}^n$ tel que

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j^*.$$

Posons $x = \sum_{k=1}^{n} x_i e_i$, alors $f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$. On en déduit que

$$x \in F \iff \left\{ \begin{array}{ll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n-p,1}x_1 + a_{n-p,2}x_2 + \cdots + a_{n-p,n}x_n & = 0 \end{array} \right.$$

On en déduit qu'un espace vectoriel de dimension p dans un espace de dimension n peut être déterminé par $n-p$ équations à n inconnues linéairement indépendantes.

Théorème 50 – Soient $f_1, \dots, f_p$ p formes linéaires linéairement indépendantes.
Si $F = \bigcap_{i=1}^{p} \operatorname{Ker} f_i$, alors $\{f_1, \dots, f_p\}$ est une base de $F^\perp$.

Démonstration : par définition de F*, on a pour tout* $x \in F$ *et tout* $i \in \{1, \dots, p\}$ $f_i(x) = 0$ *donc les* f_i *sont des éléments de* $F^\perp$*.*
On complète le système libre $\{f_1, \dots, f_p\}$ *en une base* $\{f_1, \dots, f_p; f_{p+1}, \dots, f_n\}$ *de* E^**. Comme toute base de* E^* *est une base duale, il existe une base* $\{e_1, \dots, e_n\}$ *de* E *telle que, pour tout* $i \in \{1, \dots, n\}$*,* $f_i = e_i^*$*.*

Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} x \in F &\iff f_1(x) = \cdots = f_p(x) = 0 \iff e_1^*(x) = \cdots = e_p^*(x) = 0 \\ &\iff x_1 = \cdots = x_p = 0 \iff x = \sum_{i=p+1}^{n} x_i e_i. \end{aligned}$$

On en déduit que $F = \mathrm{Vect}\{e_{p+1}, \ldots, e_n\}$. Or ce système est libre, puisque c'est un sous-ensemble d'une base donc $\dim F = n-p$. On a alors $\dim F^\perp = p$. Comme le système $\{f_1, \ldots, f_p\}$ est un système linéairement indépendant formé de p vecteurs dans un espace de dimension p, c'est une base de $F^\perp$. □

De ce théorème, on déduit que p équations linéaires à n inconnues linéairement indépendantes définissent un espace de dimension $n-p$.

Exemple - Déterminer la dimension du noyau d'une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. On écrit sa matrice A dans les bases canoniques (par exemple) de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$. En utilisant la méthode de Gauss, on aboutit à une matrice B échelonnée dont les r premières lignes sont non nulles. La manipulation faite consiste à effectuer des opérations élémentaires sur la matrice A et donc à la multiplier par une matrice P inversible. Le noyau de A est donc le noyau de B.
La forme échelonnée de la matrice B permet de conclure que les r premières lignes vont donner des équations linéairement indépendantes et on en déduit que la dimension de $\mathrm{Ker}\, f$ est $n-r$.

9.2. Faisceaux de plans dans $\mathbb{R}^3$

Soient $\varphi : (x, y, z) \mapsto ux + vy + wz$ et $\psi : (x, y, z) \mapsto u'x + v'y + w'z$ deux formes linéaires linéairement indépendantes définies sur $\mathbb{R}^3$ où (u, v, w, u', v', w') sont des réels donnés. Soit h et h' deux réels.
Soit D la droite affine d'équations

$$\begin{cases} ux + vy + wz = h \\ u'x + v'y + w'z = h' \end{cases}$$

Proposition 51 – L'ensemble $\mathscr{P}$ des plans affines qui contiennent D est l'ensemble

$$\mathscr{P} = \left\{ a(ux + vy + wz - h) + b(u'x + v'y + w'z - h') = 0\,;\, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \right\}.$$

Démonstration : soit $(a, b) \neq (0, 0)$. La forme linéaire $\zeta = a\varphi + b\psi$ est non nulle car $\{\varphi, \psi\}$ est libre donc $\mathrm{Ker}\,\zeta$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire un plan.Les éléments de $\mathscr{P}$ sont donc bien des plans affines et il est clair que ces plans contiennent D.
Réciproquement, soit P un plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$. On suppose que $D \subset P$.
La forme linéaire $f : (x, y, z) \mapsto \alpha x + \beta y + \gamma z$ est non nulle car $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$. Notons $\overrightarrow{D} = \mathrm{Ker}\,\varphi \cap \mathrm{Ker}\,\psi$. On veut que $f \in \overrightarrow{D}^\perp$ et on sait que $\{\varphi, \psi\}$ est une base de $\overrightarrow{D}^\perp$ d'après le théorème énoncé au paragraphe précédent. On en déduit que f est une combinaison linéaire de φ et ψ. Donc il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f = a\varphi + b\psi$. Comme $f(x, y, z) = \delta$, on obtient que $\delta = ah + ah'$ et on a prouvé le résultat. □ On a un résultat comparable pour des droites dans $\mathbb{R}^2$.

10. Espaces isomorphes

Définition 52 – Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$ et f une application de E dans F. Dire que f est un isomorphisme de E dans F signifie que f est une application linéaire bijective de E dans F.

Définition 53 – Soient E et F deux espaces vectoriels sur un corps $\mathbb{K}$.
Dire que E et F sont isomorphes signifie qu'il existe un isomorphisme f de E dans F.

Proposition 54 – Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors E et F sont isomorphes si et seulement si $\dim E = \dim F$.

Démonstration : supposons que $\dim E = \dim F$. *Soient* $(e_1, \ldots, e_n)$ *et* $(f_1, \ldots, f_n)$ *des bases respectives de* E *et de* F.
Pour tout $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \in E$, *on définit une application de* E *dans* F *par* $f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$.
Cette application est bien linéaire. Elle est injective car la famille $(f_1, \ldots, f_n)$ *est libre et surjective car cette famille est génératrice de* F. *On en déduit que les deux espaces sont isomorphes.*
Réciproquement, supposons qu'il existe un isomorphisme f *de* E *dans* F *et montrons que les deux espaces ont même dimension.*
Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ *une base de* E.
La famille $\big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big)$ *est libre car* f *est une application linéaire injective et* $(e_1, \ldots, e_n)$ *est libre.*
Comme f *est surjective, tout élément* y *de* F *peut s'écrire comme l'image d'un élément* x *de* E. *Or* $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ *et* f *est linéaire. Donc tout élément* y *de* F *peut s'écrire sous la forme* $\sum_{i:1}^n \lambda_i f(e_i)$. *On en déduit que la famille* $\big(f(e_1), \ldots, f(e_n)\big)$ *est génératrice de* F. *On a ainsi construit une base de* F *ayant* n *éléments donc* $\dim F = \dim E$. □

Corollaire 55 – Deux supplémentaires d'un sous-espace vectoriel F de E de dimension finie sont isomorphes entre eux.

Démonstration : évident puisqu'ils ont même dimension. □

APPLICATIONS LINÉAIRES