Espaces euclidiens

Soit E un espace euclidien de dimension finie $n > 0$. On note $\varphi(u, v)$ le produit scalaire de u et v, $\|u\|$ la norme de u et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E pour φ.

1. Adjoint d'un endomorphisme

Théorème 1 – Pour tout endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$, il existe un unique endomorphisme f^* de E tel que

$$\forall x \in E, \quad \varphi(f(x), y) = \varphi(x, f^*(y)).$$

L'endomorphisme f^* s'appelle l'adjoint de f.

Démonstration : comme φ est un produit scalaire, il est clair que si f^* existe, il est unique. Si f^* existe, on a, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et pour tout $y \in E$, $\varphi(f(e_i), y) = \varphi(e_i, f^*(y))$.

Donc f^* est défini par $f^*(y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \varphi(f(e_i), y)e_i$ pour tout $y \in E$. □

Proposition 2 – L'application $f \mapsto f^*$ est un endomorphisme involutif de $\mathscr{L}(E)$ et on a

- pour tout $(f, g) \in \mathscr{L}(E)^2$, $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$
- pour tout $f \in$GL(E), $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$

Proposition 3 – Pour tout $f \in \mathscr{L}(E)$, $\mathrm{Ker}(f^*) = \big(\mathrm{Im}(f)\big)^{\perp}$ et $\mathrm{Im}(f^*) = \big(\mathrm{Ker}(f)\big)^{\perp}$.

Démonstration : soit $x \in \mathrm{Ker}(f^*)$. Montrons que $x \in \big(\mathrm{Im}(f)\big)^{\perp}$, c'est-à-dire que, pour tout $y \in \mathrm{Im}(f)$, $\varphi(x, y) = 0$. Comme $y \in \mathrm{Im}\, f$, il existe $x' \in E$ tel que $y = f(x)$. On a alors $\varphi(x, y) = \varphi(x, f(x')) = \varphi(f^*(x), x') = \varphi(0, x') = 0$. On a donc prouvé que $\mathrm{Ker}(f^*) \subset \big(\mathrm{Im}(f)\big)^{\perp}$.

Soit $x \in \big(\mathrm{Im}(f)\big)^{\perp}$. Montrons que $x \in \mathrm{Ker}(f^*)$. Comme φ est un produit scalaire, il suffit de vérifier que, pour tout $x' \in E$, on a $\varphi(f^*(x), x') = 0$. Or $\varphi(f^*(x), x') = \varphi(x, f(x')) = 0$ car $f(x') \in \mathrm{Im}(f)$ et $x \in \big(\mathrm{Im}(f)\big)^{\perp}$. On a donc $\big(\mathrm{Im}(f)\big)^{\perp} \subset \mathrm{Ker}(f^*)$.
On procédera de même pour la deuxième égalité. □

Proposition 4 – Soient $f \in \mathscr{L}(E)$, $g \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B}$ une base orthonormale de E.
$g = f^*$ si et seulement si $\mathrm{Mat}(f, \mathscr{B}) = {}^t\mathrm{Mat}(g, \mathscr{B})$.

Démonstration : en effet, $\mathrm{Mat}(f, \mathscr{B})_{ij} = \varphi(f(e_i), e_j)$ et ${}^t\mathrm{Mat}(g, \mathscr{B})_{ij} = \varphi(e_i, g(e_j))$. □

Corollaire 5 – Un endomorphisme et son adjoint ont le même polynôme caractéristique.

Ils ont donc les mêmes valeurs propres et si l'un est diagonalisable, l'autre aussi.

2. Endomorphismes orthogonaux

2.1. Définition

Définition 6 – Un automorphisme f de E est dit orthogonal si $f^* = f^{-1}$.

Proposition 7 – L'ensemble des automorphismes orthogonaux d'un espace euclidien E est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$, appelé groupe orthogonal de E et noté $\mathrm{O}(E)$. L'ensemble des des automorphismes orthogonaux de déterminant 1 est un sous-groupe de $\mathrm{O}(E)$, appelé groupe spécial orthogonal de E et noté $\mathrm{SO}(E)$.

2.2. Propriétés

Proposition 8 – Soit f un endomorphisme de E, les assertions suivantes sont équivalentes

i) $\forall (x,y) \in E^2,\ \varphi(f(x), f(y)) = \varphi(x,y)$
ii) $\forall x \in E, \|f(x)\| = \|x\|$
iii) $f \in \mathrm{O}(E)$

Corollaire 9 – Un endomorphisme f de E est orthogonal si et seulement si l'image par f d'une base orthonormale de E est une base orthonormale.

Corollaire 10 – Un endomorphisme f de E est orthogonal si et seulement si sa matrice M dans une base orthonormale vérifie ${}^tMM = I_n$.

Définition 11 – Une matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si elle est inversible et si ${}^tM = M^{-1}$.

3. Endomorphismes symétriques

3.1. Définitions

Définition 12 – Un endomorphisme f de E est dit symétrique (respectivement anti-symétrique) s'il vérifie, pour tout $(x,y) \in E^2$,

$\varphi(f(x), y) = \varphi(x, f(y))$ (respectivement $\varphi(f(x), y) = -\varphi(x, f(y))$).

Remarque - Une application $f\ : E \to E$ qui vérifie

pour tout $(x,y) \in E^2$, $\varphi(f(x), y) = \varphi(x, f(y))$

est un endomorphisme. En effet, pour tout $(x, x', y) \in E^3$ et $(a, a') \in \mathbb{K}^2$, on a

$$\begin{aligned}
\varphi(f(ax + a'x'), y) &= \varphi(ax + a'x', f(y)) \\
&= a\varphi(x, f(y)) + a'\varphi(x', f(y)) \\
&= a\varphi(f(x), y) + a'\varphi(f(x'), y) \\
&= \varphi(af(x) + a'f(x'), y)
\end{aligned}$$

On note $\mathscr{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.

Exemples - Les homothéties, les projections orthogonales et les symétries orthogonales de E sont des endomorphismes symétriques.

Proposition 13 – L'ensemble $\mathscr{E}$ est somme directe de $\mathscr{S}(E)$ et de $\mathscr{A}(E)$ l'ensemble des endomorphismes antisymétriques.

3.2. Propriétés

Soit $f \in \mathscr{S}(E)$, alors

- si F est un sous-espace vectoriel stable par f, alors $F^\perp$ est stable par F.
- Im f et Ker f sont supplémentaires et orthogonaux dans E.
- Les sous-espaces propres de f sont supplémentaires et orthogonaux.
- Le polynôme caractéristique de f est scindé sur $\mathbb{R}$.
- L'endomorphisme f est diagonalisable dans une base orthonormale (ou encore il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de f).

3.3. Caractérisation matricielle

Proposition 14 – Un endomorphisme de E est symétrique si et seulement si sa matrice **dans une base orthonormale** quelconque de E est symétrique.

Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormale de E. L'application de $\mathscr{S}(E)$ dans l'ensemble des matrices symétriques réelles carrées d'ordre n qui associe à f sa matrice dans la base $\mathscr{B}$ est un isomorphisme. On en déduit que

Proposition 15 – $\dim \mathscr{S}(E) = \dfrac{1}{2}n(n+1)$ où $n = \dim E$.

Corollaire 16 – Toute matrice symétrique réelle M est diagonalisable et il existe une matrice P orthogonale telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale.

3.4. Caractérisation des valeurs propres

Théorème 17 – Soit f un endomorphisme symétrique de E et $\rho = \max\{|\lambda|\,;\, \lambda \in \text{Spectre}(f)\}$. On a

$$\|f\| = \rho = \sup\left\{\frac{|\varphi(f(x), x)|}{\|x\|^2}\,;\, x \in E, x \neq 0\right\}.$$

Démonstration : l'endomorphisme f étant symétrique, il est diagonalisable dans une base orthonormale de E. Notons $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres de f et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ les valeurs propres associées.

Soit $x \neq 0$ avec $x = \sum_{i=1}^{n} e_i$. On a alors

$$\frac{\varphi(f(x), x)}{\|x\|^2} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

On a donc

$$\left|\frac{\varphi(f(x), x)}{\|x\|^2}\right| \leq \rho.$$

Il suffit ensuite de prendre pour x un vecteur propre associé à la valeur propre λ_k telle que $|\lambda_k| = \rho$ pour obtenir le résultat. □

Corollaire 18 – Soit f un endomorphisme symétrique de E de valeurs propres $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de f.
Soit $V_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$. Alors

$$\lambda_k = \sup\left\{\frac{|\varphi(f(x), x)|}{\|x\|^2}\,;\, x \in V_k, x \neq 0\right\}$$

Démonstration : on fait de même qu'à la proposition précédente sur l'espace V_k. □

Théorème 19 – (Courant-Fischer)
Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n, f un endomorphisme symétrique de E de valeurs propres $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$. Si $k \in \mathbb{N}_n^*$, on note F_k l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension k. Alors, pour $1 \leq k \leq n$,

$$\lambda_k = \inf_{L \in F_k} \sup \left\{ \frac{\varphi(f(x), x)}{\|x\|^2} \, ; \, x \in L, x \neq 0 \right\} = \sup_{L \in F_{n-k+1}} \inf \left\{ \frac{\varphi(f(x), x)}{\|x\|^2} \, ; \, x \in L, x \neq 0 \right\}.$$

Démonstration : d'après le corollaire précédent,

$$\lambda_k = \sup \left\{ \frac{|\varphi(f(x), x)|}{\|x\|^2} \, ; \, x \in V_k, x \neq 0 \right\} \geq \inf_{L \in F_k} \sup \left\{ \frac{\varphi(f(x), x)}{\|x\|^2} \, ; \, x \in L, x \neq 0 \right\}.$$

Il reste à démontrer l'inégalité inverse, c'est-à-dire que

$$\lambda_k \leq \sup \left\{ \frac{|\varphi(f(x), x)|}{\|x\|^2} \, ; \, x \in L, x \neq 0 \right\} \text{ pour tout } L \in F_k.$$

Soit $L \in F_k$, alors $L \cap V_{k-1}^{\perp} \neq 0$ (il suffit de considérer les dimensions de ces espaces pour obtenir ce résultat). Or si $v \in L \cap V_{k-1}^{\perp}$ avec $v \neq 0$, on a

$$\lambda_k \leq \frac{\varphi(f(v), v)}{\|v\|^2} \leq \sup \left\{ \frac{|\varphi(f(x), x)|}{\|x\|^2} \, ; \, x \in L, x \neq 0 \right\}.$$

□

4. Formes quadratiques sur un espace euclidien

4.1. Endomorphisme associé à une forme quadratique

On note également $Q(E)$ l'espace vectoriel des formes quadratiques définies sur E.
Soit L : $\left[\begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E) & \to & Q(E) \\ f & \mapsto & q \end{array} \right.$ où q est définie par $q(x) = \varphi(f(x), x)$.

Proposition 20 – L est une application linéaire surjective. Son noyau est l'espace vectoriel des endomorphismes antisymétriques. L induit un isomorphisme de l'espace vectoriel des endomorphismes symétriques dans $Q(E)$.

Définition 21 – On dit que f et q sont associés si $L(f) = q$.

Proposition 22 – Si f et q sont associées, alors q et f sont représentées dans toute base orthonormée par la même matrice.

4.2. Diagonalisation simultanée

Théorème 23 – Soit $q : E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique. Il existe une base orthonormée de l'espace euclidien E qui est orthogonale pour la forme quadratique q.

Démonstration : soit f l'endomorphisme symétrique de E associée à q et ψ la forme bilinéaire symétrique associée à q. Comme f est symétrique, il existe une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E formée de vecteurs propres de f. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de f avec $f(e_i) = \lambda_i$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$. Vérifions que cette base est orthogonale pour q.

On a, pour $i \neq j$, $\psi(e_i, e_j) = \varphi(f(e_i), e_j) = \lambda_i \varphi(e_i, e_j) = 0$ car c'est une base orthogonale de E. La base $(e_1, \ldots, e_n)$ est donc bien orthogonale pour q. □

Corollaire 24 – Une forme quadratique q est positive (respectivement définie positive) si et seulement si toutes les valeurs propres de l'endomorphisme symétrique associé sont positives (respectivement strictement positives).

Démonstration : en reprenant les notations de la démonstration du théorème précédent, on a :

$$q(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) = q(e_1)x_1^2 + \cdots + q(e_n)x_n^2 = \lambda_1 x_1^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2.$$

□

Théorème 25 – Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient q et q' deux formes quadratiques sur E de matrices respectives, dans une base donnée de E, A et B. On suppose que q est définie positive. On munit E du produit scalaire φ associé à q.
Il existe une base orthonormée de (E, φ) qui est orthogonale pour q'.
Autrement dit, il existe une matrice P inversible telle que ${}^tPAP = I_n$ et ${}^tPBP$ soit diagonale.

ESPACES EUCLIDIENS