Agrégation Interne 1991

Éléments de solution

Partie I

1. Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, r une pseudo-réflexion de V et K le noyau de l'endomorphisme $r - I_V$.
   a) D'après le théorème du rang, $\dim \operatorname{Ker}(r - I_V) = \dim V - \dim \operatorname{Im}(r - I_V) = n - 1$.
   b) Soit $\mathscr{E}$ une base de K et u un vecteur de V qui n'appartient pas à K, alors la famille $\mathscr{E} \cup \{u\}$ est libre. Elle contient n vecteurs donc c'est une base de l'espace vectoriel V qui est de dimension n. De plus,

$$\operatorname{Mat}(r, \mathscr{E} \cup \{u\}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & a_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & a_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

   Donc $\text{Dét}(r) = a_n$. De plus $r.u - \text{Dét}(r)u \in K$ d'après l'écriture matricielle de r.
   c) On suppose $n \geq 2$ et on pose $P(t) = (t-1)(t - \text{Dét}(r))$.
   Si $x \in K$, alors $r(x) = x$ donc $P(r)(x) = 0$.
   Si $x \in \operatorname{Vect}(u)$, alors $r.u - \text{Dét}(r)u \in K$ donc $(r - I)(r - \text{Dét}(r)I)u = 0$. On a donc montré que $P(r) = 0$. Le polynôme minimal de r est alors un diviseur de P. $r - I$ est de rang 1 et $n \geq 2$, donc $r - I \neq 0$. Si $r - \text{Dét}(r)I = 0$, alors r est une homothétie. Comme $n \geq 2$, on ne peut pas avoir $r - I$ de rang 1.

   L'endomorphisme r est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé, donc si et seulement si $\text{Dét}(r) \neq 1$.
   d) On suppose $n = 2$. Si $\text{Dét}(r) \neq 1$, alors r est diagonalisable.
   Si $\text{Dét}(r) = 0$, r est une projection.
   Si $\text{Dét}(r) = -1$, r est une symétrie. Sinon r est une affinité.

   Si $\text{Dét}(r) = 1$, r est une transvection.

2-a. La matrice de M_P dans la base canonique s'écrit

$$M_P^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & & \vdots & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$$

En développant par rapport à la première ligne, on trouve

$$\begin{aligned} P_{M_P}(\lambda) &= \text{Dét}(\lambda I_n - M_P) \\ &= \lambda\, \text{Dét}(\lambda I_{n-1} - M_P^{(n-1)}) + (-1)^{n-1} a_n (-1)^{n-1} \\ &= \lambda\, \text{Dét}(\lambda I_{n-1} - M_P^{(n-1)}) + a_n \end{aligned}$$

On montre alors par récurrence que $P_{M_P}(\lambda) = P(\lambda)$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a donc

$$M_P^n + \sum_{i=0}^{n} a_i M_P^i = 0.$$

b) Soit Q un polynôme unitaire à coefficients réels, de degré n, distinct de P et tel que $Q(0) \neq 0$. On peut alors écrire que

$$Q(x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i \text{ avec } b_0 \neq 0.$$

On a, comme précédemment

$$M_Q^n + \sum_{i=1}^{n-1} b_i M_Q^i = -b_0 I_n.$$

Comme $b_0 \neq 0$, on en déduit que

$$-\frac{1}{b_0} M_Q (M_Q^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} b_i M_Q^{i-1}) = I_n$$

et donc que M_Q est inversible.

Dire que $M_Q^{-1} \circ M_P$ est une pseudo-réflexion de $\mathbb{R}^n$ signifie que $M_Q^{-1} \circ M_P - I_n$ est de rang 1. Or

$$\text{Mat}(M_P - M_Q) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_n - b_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_1 - b_1 \end{pmatrix}$$

Comme $Q \neq P$, il existe $i \in \mathbb{N}_n$ tel que $a_i \neq b_i$ donc $\text{rg}\,(M_Q - M_P) = 1$. D'où $\text{rg}\,(M_Q^{-1}(M_P - M_Q)) = 1 = \text{rg}\,(I - M_Q^{-1} M_P)$. On a donc montré que $M_Q^{-1} \circ M_P$ est une pseudo-réflexion.

Partie II

1. Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et soit P son polynôme caractéristique.

a) L'endomorphisme X_v de $\mathbb{R}^n$ est défini par : $X_v.e_i = A^{i-1}.v$. Soit $i \in \{1, \dots n-1\}$.

On a alors $\boxed{X_v M_P.e_i = X_v e_{i+1} = A^i v}$.

Calculons $X_v M_P.e_n$.

$$\begin{aligned} X_v M_P.e_n &= X_v(-\sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} e_{i+1}) = -\sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} X_V(e_{i+1}) \\ &= -\sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} A^i v \end{aligned}$$

or $P(A) = 0$ d'après le théorème de Cayley-Hamilton donc $\boxed{X_v M_P e_n = A^n v}$.

b) Soit $C_A = \{X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})\,;\, X M_P = AX\}$. Montrons que X_v appartient à C_A. On a, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $X_v M_P e_i = A^i v$ et $AX_v e_i = A(A^{i-1} v) = A^i v$.

Comme les deux endomorphismes $X_v M_P$ et AX_v coïncident sur une base de $\mathbb{R}^n$, ils sont égaux et on a $X_v \in C_A$.

Montrons que $\dim C_A \geq n$.

Soit φ l'application définie par

$$\varphi : \left[\begin{array}{l} \mathbb{R}^n \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^n) \\ \quad v \mapsto X_v \end{array} \right.$$

Cette application est linéaire et on a $\text{Im}(\varphi) \in C_A$ d'après la question précédente.

Déterminons $\text{Ker}(\varphi)$. Soit $v \in \text{Ker}(\varphi)$. Alors pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $X_v e_i = 0$. En particulier, $X_v e_1 = v$, donc $v = 0$ et φ est injective.

D'après le théorème du rang, $\dim \text{Ker}(\varphi) + \dim \text{Im}(\varphi) = \dim \mathbb{R}^n = n$, donc $\dim \text{Im}(\varphi) = n$ car $\dim \text{Ker}(\varphi) = 0$.

Or $\text{Im}(\varphi) \subset C_A$. On en déduit que $\dim(C_A) \geq n$.

2-a. On pose $\mathscr{T} = \{X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})\,;\, X_{i,j} = X_{i+1,j+1} \text{ pour } 1 \leq i,j \leq n-1\}$. $\mathscr{T}$ est non vide car la matrice nulle appartient à $\mathscr{T}$. Il est clair que si $(X,Y) \in \mathscr{T}$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $X + \lambda Y \in \mathscr{T}$. Ce qui montre que $\mathscr{T}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $(i,j) \in \mathbb{N}_{n-1}^2$. On pose $\mathscr{T}_{ij} = \{X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})\,;\, X_{i,j} = X_{i+1,j+1}\}$. $\mathscr{T}_{ij}$ est un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, il est donc de dimension $n-1$.

$\mathscr{T}$ est formé de l'intersection de $(n-1)^2$ hyperplans et les formes linéaires φ_{ij} : $M \mapsto M_{i,j} - M_{i+1,j+1}$ associées à ces hyperplans sont linéairement indépendantes. On en déduit que $\dim \mathscr{T} = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$.

Remarque : en fait les matrices de $\mathscr{T}$ sont entièrement définies par la donnée de leur première ligne et leur première colonne.

b) Soit X une matrice telle que ${}^tM_PXM_P = X$. Montrons que X appartient à $\mathscr{T}$ en calculant son terme d'indice ij pour $1 \leq i,j \leq n-1$.

$$\begin{aligned} X_{i,j} &= {}^te_iXe_j = {}^te_i({}^tM_PXM_P)e_j \\ &= {}^t(M_Pe_i)X(M_Pe_j) \\ &= {}^te_{i+1}Xe_{j+1} \text{ car } 1 \leq i,j \leq n-1 \\ &= X_{i+1,j+1} \end{aligned}$$

Donc $X \in \mathscr{T}$.

3. Soit P un polynôme unitaire, de degré n, réciproque

a) Posons $P(t) = t^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_it^i$. Alors $t^nP(1/t) = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} a_it^{n-i} = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_{n-i}t^i$. P étant réciproque, on obtient que

$$1 + \sum_{i=1}^{n} a_{n-i}t^i = a_0t^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_0a_it^i.$$

P est donc réciproque si et seulement si $a_0^2 = 1$ et, pour tout $1 \leq i \leq n-1$, $a_{n-i} = a_0a_i$.

Étudions maintenant les racines d'un polynôme unitaire réciproque. P est de degré n donc il admet n racines complexes (pas forcément distinctes).

Posons $P(t) = \prod_{i=0}^{s}(t-\lambda_i)^{\alpha_i}$ avec $\sum_{i=1}^{s}\alpha_i = n$ les λ_i distincts deux à deux. Si 0 est racine de P, alors, pour tout $t \neq 0$, on a

$$t^nP(1/t) = 0 \Longleftrightarrow t^n(\sum_{i=0}^{n-1}\frac{a_i}{t^i} + \frac{1}{t^n}) = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=0}^{n-1} a_it^{n-i} + 1 = 0$$

or ce dernier polynôme ne peut être nul. On aboutit à une contradiction donc 0 n'est pas racine d'un polynôme réciproque.

On a donc $P(t) = \prod_{i=0}^{s}(t-\lambda_i)^{\alpha_i}$ avec $\sum_{i=1}^{s}\alpha_i = n$ les λ_i distincts deux à deux tous non nuls. D'où

$$\begin{aligned} t^nP(t) = P(0)P(t) &\Longleftrightarrow t^n\prod_{i=1}^{s}(\frac{1}{t}-\lambda_i)^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^{s}(t^{\alpha_i}(\frac{1}{t}-\lambda_i)^{\alpha_i}) \\ &\Longleftrightarrow \prod_{i=1}^{s}(1-\lambda_i\,t)^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^{s}(t-\frac{1}{\lambda_i})^{\alpha_i} \end{aligned}$$

On en déduit que, si $\lambda \neq 0$ est racine d'un polynôme réciproque, alors $1/\lambda$ est aussi racine. Or P est à coefficients réels, donc, si $\lambda \notin \mathbb{R}$ est racine de P, $\overline{\lambda}$ aussi. Finalement

- 0 n'est pas racine de P ;
- $t-1$, $t+1$, $(t-1/\lambda)(t-\lambda)$ sont des polynômes réciproques (pour tout $\lambda \neq 0$) ;
- si $\lambda \in \mathbb{R}$ est racine de P, alors $1/\lambda$ est aussi racine de P avec le même ordre de mutliplicité ;
- si $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ est racine de P alors
  - si $|\lambda| \neq 1$, alors $1/\lambda$, $\overline{\lambda}$ et $1/\overline{\lambda}$ sont également racines de P avec le même ordre de multiplicité ;
  - si $|\lambda| = 1$, alors $1/\lambda = \overline{\lambda}$ est racine de P avec le même ordre de multiplicité.

b) Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de polynôme caractéristique P réciproque.

On a $P(X) = \text{Dét}(XI-A)$ donc $P(0) = \text{Dét}(A)$. Or 0 ne peut pas être racine d'un polynôme réciproque donc A est inversible. Calculons le polynôme caractéristique $Q(X)$ de la matrice ${}^tA^{-1}$.

$$\begin{aligned} Q(X) &= \text{Dét}(XI_n - {}^tA^{-1}) = \text{Dét}(X{}^tA^{-1}({}^tA - \frac{1}{X}I_n)) \\ &= \text{Dét}(-X{}^tA^{-1})\,\text{Dét}(\frac{1}{X}I_n - {}^tA) = (-1)^nX^n\,\text{Dét}({}^tA^{-1})\,\text{Dét}(\frac{1}{X}I_n - A) \\ &= (-1)^nX^n\big(\text{Dét}(A)\big)^{-1}P(\frac{1}{X} \\ &= (-1)^n\big(\text{Dét}(A)\big)^{-1}P(0)P(X) \text{ car } P \text{ est réciproque} \\ &= P(X) \text{ car } P(0) = \text{Dét}(A) \end{aligned}$$

Les matrices A et ${}^tA^{-1}$ ont donc le même polynôme caractéristique P.

Or, d'après I.2.a, P est également le polynôme caracéristique de M_P, donc aussi de ${}^tM_P^{-1}$. On en déduit que

$$\begin{aligned} C_{{}^tM_P^{-1}} &= \{X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})\,;\, XM_P = {}^tM_P^{-1}X\} \\ &= \{X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})\,;\, {}^tM_PXM_P = {}^tX\} \end{aligned}$$

4. Soient P et Q deux polynômes unitaires réciproques de degré n.
   a) Montrer qu'il existe une matrice X de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, non nulle et telle que ${}^tM_PXM_P = {}^tM_QXM_Q = X$ revient à montrer que $C_{{}^tM_P^{-1}} \cap C_{{}^tM_Q^{-1}} \neq \{0\}$.

   Or ces deux ensembles sont inclus dans $\mathscr{T}$ d'après la question II.2.b ; leur somme est également incluse dans $\mathscr{T}$ donc la dimension de la somme est inférieure à $2n-1$. D'après la question II.1.b, la dimension de chacun de ces espaces est supérieure à n.
   Comme $\dim C_{{}^tM_P^{-1}} + \dim C_{{}^tM_Q^{-1}} = \dim(C_{{}^tM_P^{-1}} + C_{{}^tM_Q^{-1}}) + \dim\big(C_{{}^tM_P^{-1}} \cap C_{{}^tM_Q^{-1}}\big)$, on en déduit que $\dim\big(C_{{}^tM_P^{-1}} \cap C_{{}^tM_Q^{-1}}\big) \geq 2n - 1 - (n+n) = 1$.

   On en déduit qu'il existe une matrice M non nulle telle que ${}^tM_PXM_P = {}^tM_QXM_Q = X$.
   b) Si la matrice X vérifie $(*)$, alors la matrice ${}^tX$ aussi et si X et Y vérifie $(*)$, alors les matrices $X+Y$ et $X-Y$ aussi. Donc les matrices $X + {}^tX$ et $X - {}^tX$ vérifient $(*)$. Or elles ne peuvent être nulles en même temps car X n'est pas la matrice nulle. Il existe donc une matrice symétrique ou une matrice antisymétrique non nulle qui vérifie $(*)$.
   c) Soit $P(t) = t^3 + 5t^2 - 5t - 1$ et $Q(t) = t^3 + 4t^2 + 4t + 1$. On vérifie que ce sont bien deux polynômes réciproques.
   La matrice X que l'on cherche doit appartenir à $\mathscr{T}$ et être symétrique, elle est donc de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$.

   On doit donc résoudre

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & b \\ c & b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a & b \\ c & b & a \end{pmatrix}.$$

   Cette égalité est équivalente à $5a - 4b - c = 0$. De même pour la matrice M_Q et on trouve la relation $4a + 5b + c = 0$. Les matrices X sont donc de la forme

$$a \begin{pmatrix} 1 & -9 & 41 \\ -9 & 1 & -9 \\ 41 & -9 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } a \in \mathbb{R}.$$

Partie III

On considère un espace vectoriel V de dimension finie et deux automorphismes a et b de V tels que l'automorphisme $b^{-1} \circ a$ soit une pseudo-réflexion. On note P (respectivement Q) le polynôme caractéristique de a (respectivement b) et W le noyau de l'endomorphisme $b - a$.

1. On a $\operatorname{Ker}(b-a) = \operatorname{Ker}\big(b(I - b^{-1}a)\big) = \operatorname{Ker}(I - b^{-1}a)$. Or $\dim \operatorname{Ker}(I - b^{-1}a) = \dim E - \operatorname{rg}(I - b^{-1}a) = n - 1$ donc $\dim W = n - 1$.
2. Soit E un sous-espace vectoriel de V, non réduit à $\{0\}$, tel que $a(E) = b(E) = E$.
   a) Soient a' la restriction de a à E et F un supplémentaire de E dans V. Si $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ sont respectivement une base de E et de F, alors la réunion de ces deux systèmes forme une base de V.
   Comme $a(E) = E$, la matrice de A dans cette base est la matrice par blocs $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_4 \end{pmatrix}$ où A_1 est la matrice de a' dans la base $\mathscr{B}_1$. Le calcul de déterminant par blocs montre alors que le polynôme caractéristique de a' divise celui de a.
   b) On suppose $E \subset W$. Par définition de W, on a $a_{/W} = b_{/W}$. Donc le polynôme caractéristique de a' divise celui de a et celui de b. Comme $E \neq \{0\}$, le polynôme caractéristique de a' n'est pas constant et les polynômes P et Q ne sont pas premiers entre eux.
   c) On suppose que l'espace vectoriel E est distinct de V et n'est pas contenu dans W. Soit $\mathscr{E}$ une base de E.
   Comme $E \not\subset W$, il existe $e \in \mathscr{E}$ tel que $e \notin W$. Or $\dim W = n - 1$, donc la réunion d'une base G de W et de e est une base de V (car $\dim V = n$).
   On peut donc compléter le système libre $\mathscr{E}$ par une famille $\mathscr{F}$ extraite du système générateur $G \cup \{e\}$ de façon à obtenir une base de V.

Comme $\{e\} \subset \mathscr{E}$, la famille $\mathscr{F}$ qui ne contient pas e est contenue dans g et donc répond à la question.

Les matrices $\mathrm{Mat}(a, \mathscr{E} \cup \mathscr{F})$ et $\mathrm{Mat}(b, \mathscr{E} \cup \mathscr{F})$ sont respectivement de la forme

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & C' \end{pmatrix}$$

Comme a et b sont égales sur W, on a $B = B'$ et $C = C'$. Les polynômes caractéristiques de a et b sont donc divisibles par celui de C (qui n'est pas constant car $E \neq V$) donc ils ne sont pas premiers entre eux.

d) Si les polynômes P et Q sont premiers entre eux, alors $E = V$, c'est-à-dire que a et b n'ont pas de sous-espace invariant commun non trivial.

3. On suppose maintenant que les polynômes P et Q sont premiers entre eux.

a) a est un automorphisme donc $\dim(a^{-j}(W)) = \dim W = n - 1$. L'espace $a^{-j}(W)$ est donc un hyperplan de V. L'intersection de $n-1$ hyperplans d'un espace de dimension n est au moins de dimension 1 donc $\cap_{j=0}^{n-2} a^{-j}(W) \neq \{0\}$.

b) Soient v un vecteur non nul de $\cap_{j=0}^{n-2} a^{-j}(W)$ et $E = \mathrm{Vect}\{(a^{-j}.v)_{0 \leq j \leq n-1}\}$. Supposons que $\dim E < n$. Alors il existe $j_0 \in \{0, \ldots, n-1\}$ tel que $a^{j_0} v$ est combinaison linéaire des autres vecteurs $a^j.v$. Prenons le plus grand indice j_0 tel que ce soit le cas. On a alors $a(E) \subset E$.

Comme $v \in \cap_{j=0}^{n-2} a^{-j}(W)$, $a^j.v \in W$ pour $0 = 0, \ldots, n-2$. On en déduit que $E \subset W$ et donc que $a_{/E} = b_{/E}$. Contradiction avec la question III.2 (car P et Q sont premiers entre eux et $E \neq \{0\}$).

On en déduit que $\{a^j.v \,;\, 0 \leq j \leq n-1\}$ est une base de E.

c) Posons $e_j = a^j.v$, $P(x) = x^n + \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i x^i$ et $Q(x) = x^n + \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i x^i$.

- si $j \in \{0, \ldots, n-2\}$, alors $a(e_j) = a^{j+1}.v = e_{j+1}$
- $a(e_{n-1}) = a^n.v = -\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i e_j$

On en déduit que $\mathrm{Mat}(a, \mathscr{E}) = M_P$.

- si $j \in \{0, \ldots n-2\}$, alors $a^j.v \in W$ par construction de W donc $b(e_j) = b(a^j.v) = a(a^j.v) = a^{j+1}.v = e_{j+1}$.
- si $j = n-1$, alors $b(a^{n-1}.v) = -\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i e_i$

On en déduit que $\mathrm{Mat}(b, \mathscr{E}) = M_Q$.

Partie IV

On reprend les notations de la partie III et on suppose en outre que les polynômes P et Q sont réciproques et premiers entre eux.

1-a. D'après III, il existe une base $\mathscr{E}$ de V tel que $\mathrm{Mat}(a, \mathscr{E}) = M_P$ et $\mathrm{Mat}(b, \mathscr{E}) = M_Q$. D'aprše II.4, il existe une matrice X de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle, symétrique ou antisymétrique telle que

$$^t M_P X M_P = {}^t M_Q X M_Q = X$$

Soit f la forme bilinéaire dont la matrice dans la base $\mathscr{E}$ est X. On a

$$f(a.x, a.y) = {}^t y {}^t M_P X M_P x = {}^t y X x = f(x, y)$$
$$f(b.x, b.y) = {}^t y {}^t M_Q X M_Q x = {}^t y X x = f(x, y)$$

b) Soit $E = \{u \in V \,;\, \forall x \in V,\ f(u, x) = 0\}$. E est stable par a et par b d'après IV.1.a, or P et Q ne sont pas premiers entre eux donc $E = \{0\}$ ou $E = V$. X est non nulle donc f est nulle d'où $E \neq V$. On en déduit que $E = \{0\}$, ce qui signifie que f est non dégénrée.

c) Soit $\Delta : \left[\begin{array}{c} V \to V^* \\ v \mapsto (x \mapsto f(v, x)) \end{array} \right.$ est une application linéaire car f est bilinéaire.

Montrons que Δ est injective. Soit $v \in V$ tel que $\Delta(v) = 0$. f est non dégénérée donc $v = 0$.
De plus $\dim V = \dim V^*$ donc Δ est bijective.

On en déduit que, pour toute forme linéaire l définie sur V, il existe un unique $v \in V$ tel que $l(x) = f(v, x)$.

2. On note p l'endomorphisme (de rang 1) $b^{-1} \circ a - I_V$.

a) Comme p est de rang 1, il existe $w \neq 0$ tel que $\mathrm{Im}(p) = \mathbb{R}w$. L'application l définie, pour tout $x \in V$ par $p.x = l(x)w$ est une forme linéaire donc il existe $v \in V$ tel que $p.x = f(v, x)w$.

b) Comme P et Q sont réciproques, on a $P(0)^2 = Q(0)^2 = 1$. De plus, $P(0) = \text{Dét}(a)$ et $Q(0) = \text{Dét}(b)$. Donc $c = \text{Dét}(b^{-1}a) = \text{Dét}(a)/\,\text{Dét}(b) = \pm 1$.
rg $(b^{-1}a - I_V) = 1$ donc $b^{-1}a$ est une pseudo-réflexion et d'après I.1.c, $P(t) = (t-1)(t - \text{Dét}(b^{-1}a))$ est son polynôme minimal. Donc $(p + I_v - I_v)(p + I_V - cI_V) = p^2 + (1-c)p = 0$.

c) Pour tout $(x, y) \in V^2$,

$$\begin{aligned} f(p.x + x, p.y + y) &= f(p.x, p.y) + f(x, p.y) + f(p.x, y) + f(x, y) \\ &= f(v, x)f(v, y)f(w, w) + f(v, y)f(x, w) + f(v, x)f(w, y) \text{ d'après } (**) \end{aligned}$$

On fait $x = w$, d'où

$$f(v, w)f(v, y)f(w, w) + f(v, y)f(w, w) + f(v, w)f(w, y) = 0 \text{ c'est-à-dire}$$

E_1 $$\big(f(v, w) + 1\big)\big(f(v, y)f(w, w)\big) + f(v, w)f(w, y) = 0$$

or $p^2 + (1-c)p = 0$ donc $f(v, x)p.w + (1-c)f(v, x)w = 0$. f étant non dégénérée, il existe $x \in V$ tel que $f(v, x) \neq 0$. D'où $p.w + (1-c)w = 0$ i.e. $\big(f(v, w) + (1-c)\big)w = 0$.
Le vecteur w étant non nul, on obtient

E_2 $$f(v, w) + 1 - c = 0$$

On reporte cette égalité dans E_1 et on trouve

$$\begin{aligned} &c\big(f(v, y)f(w, w)\big) + f(v, w)f(w, y) = 0 \text{ c'est-à-dire} \\ &\forall y \in V,\ f\big(cf(w, w)v + f(v, w)w, y\big) = 0 \end{aligned}$$

La forme f étant non dégénérée, on en déduit que

E_3 $$cf(w, w)v + f(v, w)w = 0.$$

3-a. On suppose f antisymétrique. Alors $f(w, w) = 0$. Comme $w \neq 0$, on obtient $f(v, w) = 0$. E_2 permet alors de conclure que $c = 1$, c'est-à-dire $\text{Dét}(a) = \text{Dét}(b)$.

b) On suppose f symétrique. Raisonnons par l'absurde et supposons que $c = 1$. D'après E_2, $f(v, w) = 0$. En reportant dans E_1, on a $\big(f(v, w) + 1\big)f(v, y)f(w, w) = 0$.
Comme $v \neq 0$, d'après E_3, $f(w, w) = 0$.
On a donc

E_4 $$\forall (x, y) \in V^2, \quad f(v, y)f(w, x) + f(v, x)f(w, y) = 0$$

On prend $x = y$, d'où $f(v, x)f(w, x) = 0$. V est alors la réunion de deux hyperplans, ce qui est absurde. Donc $c \neq 1$.
On a donc $c = -1$. La relation E_3 devient $f(w, w)v = f(v, w)w$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $v = \lambda w$ (car, si $f(w, w) = 0$, alors $c = 1$). La relation obtenue à la question IV.2.a. devient alors $p.x = \lambda f(v, x)v$, soit encore $p.x = \pm f(\sqrt{|\lambda|}v, x)\sqrt{|\lambda|}v = \pm f(u, x)u$.

c) f est symétrique si et seulement si $\text{Dét}(a) = -\,\text{Dét}(b)$, i.e. si et seulement si $P(0) = -Q(0)$. En utilisant II.3.a., on voit que $P(0) = (-1)^s$ où s est la multiplicité de -1 en tant que racine de P. Donc f est symétrique si et seulement si l'un des deux polynômes P ou Q admet -1 comme racine d'ordre impair (-1 ne peut pas être racine commune car les deux polynômes sont premiers entre eux).

4. On suppose qu'il existe une forme bilinéaire symétrique f non dégénérée et un vecteur u, non nul, tels que $p.x = -f(u, x)u$.

a) Soit t tel que $I_V - tb^{-1}$ soit inversible. On vérifie que

$$I_V + p \circ (I_V - tb^{-1})^{-1} = b^{-1} \circ (a - tI_V) \circ b \circ (b - tI_V)^{-1}.$$

b) Soit ℓ une forme linéaire sur V et L l'endomorphisme de V défini par $L.x = \ell(x)u$. D'après IV.1.c., il existe un unique $v \in V$ tel que $\ell(x) = f(v, x)$. Soit $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ une base de $\text{Ker}(\ell)$ que l'on complète avec e_n pour obtenir une base de V. Alors

$$\text{Mat}(L, (e_1, \ldots, e_n)) = \begin{pmatrix} 0 & A \\ 0 & l_n \end{pmatrix}$$

Donc $\text{Dét}(I_n - L) = l_n + 1$ où $Le_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} l_i e_i = \ell(e_n)u$.

Déterminons l_n.
Si $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, alors $\ell(u) = \alpha_n \ell(e_n)$ car les e_i, pour $1 \leq i \leq n-1$ sont dans le noyau de ℓ. Si on identifie les coordonnées devant e_n, on trouve $l_n \alpha_n = l(u)\alpha_n$.

- si $\alpha_n \neq 0$, alors $l_n = \ell(u)$
- si $\alpha_n = 0$, alors $\ell(u) = 0$ et $l_n = 0$

Finalement on a prouvé que $\text{Dét}(I + L) = 1 + \ell(u)$.

$$\begin{aligned}\frac{P(t)}{Q(t)} = \frac{\text{Dét}(a - tI_V)}{\text{Dét}(b - tI_V)} &= \frac{\text{Dét}(b(I_V + p\circ(I - tb^{-1})^{-1}(b - tI_V)b^{-1})}{\text{Dét}(b - tI_V)} \\ &= \text{Dét}(I_V + +p\circ(I - tb^{-1})^{-1}) = 1 - f\big(u, (I_V - tb^{-1})^{-1}.u\big)\end{aligned}$$

car, si on pose $Lx = p\circ(I - tb^{-1})^{-1}x = -f(u, (I_V - tb^{-1})^{-1}x)u$, alors $\text{Dét}(I + L) = -f(u, (I_V - tb^{-1})^{-1}x)u$ (puisque $x \mapsto -f(u, (I_V - tb^{-1})^{-1}x)$ est une forme linéaire sur V).

5. En plus des hypothèses de la question 4, on suppose que les racines de Q sont toutes réelles et simple. On note S l'ensemble de ces racines.

   a) b est diagonalisable donc il existe une base (v_λ) de E formée de vecteurs propres de b. On a $u = \sum_{\lambda\in S} \alpha_\lambda v_\lambda$. Il suffit alors de poser $u_\lambda = \alpha_\lambda v_\lambda$.

   b) Soient λ et μ des éléments de S tels que $\lambda\mu \neq 1$. On a

$$\begin{aligned}f(u_\lambda, u_\mu) &= f(b.u_\lambda, b.u_\mu) \text{ d'après } IV.1.a. \\ &= \lambda\mu\, f(u_\lambda, u_\mu)\end{aligned}$$

   Or $\lambda\mu \neq 1$ donc $f(u_\lambda, u_\mu) = 0$.

   c) Soit $t \notin S$.

$$\begin{aligned}\frac{P(t)}{Q(t)} &= 1 - f(u, (I_V - tb^{-1})^{-1}u) \\ &= 1 - f(\sum_{\lambda\in S} u_\lambda, (I_V - tb^{-1})^{-1}\sum_{\lambda\in S} u_\lambda) \\ &= 1 - f(\sum_{\lambda\in S} u_\lambda, \sum_{\lambda\in S}(I_V - tb^{-1})^{-1}u_\lambda)\end{aligned}$$

   or $(I_V - tb^{-1})u_\lambda = u_\lambda - t\frac{1}{\lambda}u_\lambda = (1 - \frac{t}{\lambda})u_\lambda$ donc $(I_V - tb^{-1})^{-1}u_\lambda = \frac{1}{1 - t/\lambda}u_\lambda$ donc

$$\frac{P(t)}{Q(t)} = 1 - f(\sum_{\lambda\in S} u_\lambda, \sum_{\lambda\in S}\frac{1}{1 - t/\lambda}u_\lambda) \text{ or } f(u_\lambda, u_\mu) = 0 \text{ si } \lambda\mu \neq 1 \text{ d'où}$$

$$\begin{aligned}\frac{P(t)}{Q(t)} &= 1 - \sum_{\lambda\in S} f(u_{1/\lambda}, \frac{1}{1 - t/\lambda}u_\lambda) \\ &== 1 - \sum_{\lambda\in S}\frac{1}{1 - t/\lambda}f(u_{1/\lambda}, u_\lambda) \\ &= 1 - \sum_{\lambda\in S} f(u_{1/\lambda}, u_\lambda)/(1 - t\,\lambda^{-1}).\end{aligned}$$

   D'après l'unicité de la décomposition en éléments simples,

$$\frac{P(t)}{Q(t)} = \sum_{\lambda\in S}\frac{P(\lambda)}{Q'(\lambda)(\lambda - t)}$$

   on en déduit que

$$\frac{P(\lambda)}{Q'(\lambda)} = -\lambda f(u_\lambda, u_{1/\lambda}).$$