Agrégation Interne 1991

Notations

Dans ce problème, $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des réels et n est un entier naturel non nul.
Soit A une matrice. On note ${}^tA$ sa matrice transposée, $A_{i,j}$ le coefficient de sa i-ème ligne et j-ème colonne et AB son produit par la matrice B. Si x est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, on le considère comme une matrice à une colonne, en particulier ${}^tx$ est une matrice à une ligne. On note e_i le vecteur de $\mathbb{R}^n$ défini par ${}^te_i = (\delta_i^1, \delta_i^2, \dots, \delta_i^n)$ où $\delta_i^i = 1$ et $\delta_i^j = 0$ si $i \neq j$. $\mathscr{E} = (e_i\,;\, 1 \leq i \leq n)$ est donc la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des $(n \times n)$-matrices à coefficients réels et I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Si A est une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par $x \mapsto Ax$ est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ noté encore A. Par ailleurs, on note $A^0 = I_n$ et on définit la matrice A^i pour $i \geq 1$ par la relation de récurrence $A^{i+1} = A^iA$. Le polynôme $P(t) = \text{Dét}(tI_n - A)$ est appelé *polynôme caractéristique* de la matrice A.
Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. On note I_V l'endomorphisme identité de V. Soit a un endomorphisme de V, on note $a \circ b$ son composé avec l'endomorphisme b, on note $a.x$ l'image par a du vecteur x de V et on note $a(E)$ l'image par a du sous-espace vectoriel E, d'autre part, on définit pour tout entier i un endomorphisme a^i par $a^0 = I_V$ et la relation de récurrence $a^{i+1} = a^i \circ a$.
Si $\mathscr{E}$ est une base de V, on note $\text{Mat}(a, \mathscr{E})$ la matrice de l'endomorphisme a de V dans la base $\mathscr{E}$. Le déterminant de la matrice $\text{Mat}(a, \mathscr{E})$, qui ne dépend pas de la base $\mathscr{E}$, sera noté $\text{Dét}(a)$. Le polynôme $P(t) = \text{Dét}(tI_V - a)$ sera appelé *polynôme caractéristique* de a.
Un polynôme sera dit unitaire si le coefficient de son terme de plus haut degré est égal à 1. On remarquera qu'un polynôme caractéristique est toujours unitaire. Si P est un polynôme à coefficients réels, on appelle racine de P tout nombre complexe qui annule P. Le *polynôme minimal* d'un endomorphisme a est le polynôme unitaire de plus petit degré P tel que $P(a) = 0$.

Partie I

On dit qu'un endomorphisme r d'un espace vectoriel V est une pseudo-réflexion si l'endomorphisme $r - I_V$ est de rang égal à1.

1. Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, soit r une pseudo-réflexion de V et soit K le noyau de l'endomorphisme $r - I_V$.
   a) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel K ?
   b) Soit $\mathscr{E}$ une base de K et u un vecteur de V qui n'appartient pas à K. Montrer que $\mathscr{E} \cup \{u\}$ est une base de V. Écrire la matrice de l'endomorphisme r dans cette base et montrer que le vecteur $r.u - \text{Dét}(r)u$ appartient à K.
   c) On suppose $n \geq 2$. Montrer que $P(t) = (t-1)(t - \text{Dét}(r))$ est le polynôme minimal de l'endomorphisme r. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'endomorphisme r soit diagonalisable.
   d) On suppose $n = 2$. Caractériser, selon les valeurs de son déterminant, la nature géométrique de la pseudo-réflexion r.
2. À tout polynôme unitaire $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ à coefficients réels, on associe l'endomorphisme M_P de $\mathbb{R}^n$ défini par :
$$\begin{cases} M_P.e_i = e_{i+1} \text{ pour } 1 \leq i < n; \\ M_P.e_n = -(a_ne_1 + a_{n-1}e_2 + \cdots + a_2e_{n-1} + a_1e_n). \end{cases}$$
   a) Calculer le polynôme caractéristique de l'endomorphisme M_P. Montrer que :
$$M_P^n + a_1\,M_P^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\,M_P + a_nI_n = 0.$$
   b) Soit Q un polynôme unitaire à coefficients réels, de degré n, distinct de P et tel que $Q(0) \neq 0$. Montrer que l'endomorphisme M_Q de $\mathbb{R}^n$ est inversible et que $M_Q^{-1} \circ M_P$ est une pseudo-réflexion.

Partie II

1. Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et soit P son polynôme caractéristique.
   a) À tout vecteur v de $\mathbb{R}^n$, on associe l'endomorphisme X_v de $\mathbb{R}^n$ défini par :
$$X_v.e_i = A^{i-1}.v.$$

Calculer $X_v M_P.e_i$ pour $1 \leq i \leq n-1$, puis $X_v M_P.e_n$.

b) On pose

$$C_A = \{X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})\,;\, XM_P = AX\}.$$

Montrer que X_v appartient à C_A et que $\dim C_A \geq n$.

2-a. On pose

$$\mathscr{T} = \{X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}^n)\,;\, X_{i,j} = X_{i+1,j+1} \text{ pour } 1 \leq i,j \leq n-1\}.$$

Vérifier que $\mathscr{T}$ est un espace vectoriel et calculer sa dimension.

b) Soit X une matrice telle que ${}^tM_P X M_P = X$. Montrer que X appartient à $\mathscr{T}$.

3. On dira que le polynôme P à coefficients réels, unitaire, de degré n, est *réciproque* s'il vérifie la relation $t^n P(1/t) = P(0)P(t)$ pour tout nombre réel t non nul.

a) Caractériser les polynômes réciproques d'abord à partir de leurs coefficients, puis à partir de l'ensemble de leurs racines, avec multiplicité.

b) Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de polynôme caractéristique P réciproque. Calculer le polynôme caractéristique de la matrice ${}^tA^{-1}$. En déduire que

$$C_{{}^tM_P^{-1}} = \{X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})\,;\, {}^tM_P X M_P = X\}.$$

4. Soit P et Q deux polynômes unitaires réciproques de degré n.

a) Montrer qu'il existe une matrice X de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, non nulle et telle que

$$(*) \qquad {}^tM_P X M_P = {}^tM_Q X M_Q = X.$$

b) Montrer qu'il existe une matrice X de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, non nulle, symétrique ou antisymétrique, qui vérifie la condition $(*)$.

c) Trouver explicitement une matrice symétrique X vérifiant $(*)$ dans le cas où $P(t) = t^3 + 5t^2 - 5t - 1$ et $Q(t) = t^3 + 4t^2 + 4t + 1$ (on pourra utiliser la forme bilinéaire symétrique associée à la matrice X).

Partie III

On considère un espace vectoriel V de dimension finie et deux automorphismes a et b de V tels que l'automorphisme $b^{-1} \circ a$ soit une pseudo-réflexion. On note P (respectivement Q) le polynôme caractéristique de a (respectivement b) et W le noyau de l'endomorphisme $b - a$.

1. Quelle est la dimension de W ?

2. Soit E un sous-espace vectoriel de V, non réduit à $\{0\}$, tel que $a(E) = b(E) = E$.

a) Soit a' la restriction de a à E. Que peut-on dire du polynôme caractéristique de a' ?

b) On suppose que l'espace vectoriel E est contenu dans W. Montrer que les polynômes P et Q ne sont pas premiers entre eux.

c) On suppose que l'espace vectoriel E est distinct de V et n'est pas contenu dans W. Soit $\mathscr{E}$ une base de E. Montrer qu'il existe une famille $\mathscr{F}$ non vide de vecteurs de W telle que $\mathscr{E} \cup \mathscr{F}$ soit une base de V. Comparer l'écriture des matrices $\mathrm{Mat}(a, \mathscr{E} \cup \mathscr{F})$ et $\mathrm{Mat}(b, \mathscr{E} \cup \mathscr{F})$ et en déduire que les polynômes P et Q ne sont pas premiers entre eux.

d) Que peut-on dire si les polynômes P et Q sont premiers entre eux ?

3. On suppose maintenant que les polynômes P et Q sont premiers entre eux.

a) Quelle est la dimension de l'espace vectoriel $a^{-j}(W)$? Montrer que l'espace vectoriel $\cap_{j=0}^{n-2} a^{-j}(W)$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

b) Soit v un vecteur non nul de $\cap_{j=0}^{n-2} a^{-j}(W)$. Montrer que les vecteurs $a^{-j}.v$ $(0 \leq j \leq n-1)$ forment une base $\mathscr{E}$ de V (on pourra considérer l'espace vectoriel E qu'ils engendrent et montrer que, si $\dim E < n$, alors $E \subset W$).

c) Montrer que $\mathrm{Mat}(a, \mathscr{E}) = M_P$ et $\mathrm{Mat}(b, \mathscr{E}) = M_Q$.

Partie IV

On reprend les notations de la partie III et on suppose en outre que les polynômes P et Q sont réciproques et premiers entre eux.

1-a. Vérifier que les résultats obtenus dans les parties II et III prouvent l'existence d'une forme bilinéaire sur V non nulle, symétrique ou antisymétrique et vérifiant pour tous vecteurs x et y de V :

$$f(a.x, a.y) = f(b.x, b.y) = f(x, y).$$

b) En considérant l'ensemble E des vecteurs u de V tels que $f(u, x) = 0$ pour tout vecteur x de V, montrer que la forme f est non dégénérée.

c) Montrer que toute forme linéaire définie sur V peut s'exprimer au moyen de f.

2. On note p l'endomorphisme (de rang 1) $b^{-1} \circ a - I_V$.
   a) Montrer qu'il existe des vecteurs v et w non nuls de V tels que

$$(**) \qquad p.x = f(v,x)w.$$

   b) Vérifier que $c = \text{Dét}(b^{-1} \circ a) = P(0)/Q(0) = \pm 1$. En utilisant I.1.c), montrer que $p^2 + (1-c)p = 0$.
   c) Calculer $f(p.x + x, p.y + y)$ directement puis en utilisant les propriétés d'invariance de f. Montrer que $cf(w,w)v + f(v,w)w = 0$.

3-a. On suppose f antisymétrique. Montrer que $\text{Dét}(a) = \text{Dét}(b)$.
   b) On suppose f symétrique. Montrer que $\text{Dét}(a) \neq \text{Dét}(b)$ (on pourra remarquer que, si $c = 1$, $f(v,x)f(w,x) = 0$ et $\big(f(v,x)\big)^2 f(w,y) = 0$ pour tout x et y). Montrer qu'il existe un vecteur u de V tel que $p.x = \pm f(u,x)u$.
   c) Discuter la symétrie de f selon l'ordre de multiplicité de -1 comme racine de l'un des polynômes P ou Q.

4. On suppose qu'il existe une forme bilinéaire symétrique f non dégénérée et un vecteur u, non nul, tels que $p.x = -f(u,x)u$.
   a) Vérifier que

$$I_V + p \circ (I_V - tb^{-1})^{-1} = b^{-1} \circ (a - tI_V) \circ b \circ (b - tI_V)^{-1}.$$

   b) Soit ℓ une forme linéaire sur V et L l'endomorphisme de V défini par $L.x = \ell(x)u$.
   Montrer que $\text{Dét}(I_V + L) = 1 + \ell(u)$.
   En déduire que

$$\frac{P(t)}{Q(t)} = 1 - f\big(u, (I_V - tb^{-1})^{-1}.u\big).$$

5. En plus des hypothèses de la question 4, on suppose que les racines de Q sont toutes réelles et simples. On note S l'ensemble de ces racines.
   a) Montrer qu'il existe une famille de vecteurs $\{u_\lambda\}_{\lambda \in S}$ telle que

$$b.u_\lambda = \lambda u_\lambda \text{ et } u = \sum_{\lambda \in S} u_\lambda.$$

   b) Soient λ et μ des éléments de S tels que $\lambda\mu \neq 1$. Montrer que $f(u_\lambda, u_\mu) = 0$.
   c) Montrer que, pour tout réel t non dans S, on a

$$\frac{P(t)}{Q(t)} = 1 - \sum_{\lambda \in S} f(u_{1/\lambda}, u_\lambda)/(1 - t\,\lambda^{-1}).$$

   En déduire que, pour tout λ dans S, on a

$$f(u_\lambda, u_{1/\lambda}) = -\frac{P(\lambda)}{\lambda Q'(\lambda)}.$$