Chapitre 4

Quelques types de raisonnement

1. Aide à la rédaction d'un raisonnement

1.1. Analyse du problème

La première chose est de distinguer les hypothèses (= propositions vraies) de la question (=proposition à démontrer) : il faut savoir clairement distinguer ce qui est connu ou admis de ce qui est à montrer.
Une fois reconnues toutes les hypothèses, il faut les expliciter, éventuellement les écrire sous une forme synonyme : introduisez des notations (il faut nommer les objets afin de pouvoir en parler), rappelez-vous des propriétés que les hypothèses peuvent entrainer.

Remarque - Les hypothèses interviennent généralement au cours du raisonnement ; elles en sont rarement le point de départ. Il faut trouver le bon endroit où les utiliser.

On s'intéresse ensuite au problème à montrer :

- → essayer de le rapprocher d'un problème déjà résolu
- → faire une figure peut être une aide (mais non une démonstration)
- → regarder des cas particuliers (pour se faire une idée)
- → ne pas oublier d'hypothèses et ne pas les affaiblir

1.2. Rédaction d'une démonstration

- → Annoncez ce que vous allez faire et donnez vous conclusions : structurez vos démonstrations
- → Fixez vos notations : si vous introduisez une nouvelle notation, définissez-la clairement : "soit x un réel positif"
- → Justifiez les étapes de votre démonstration : citez les théorèmes avec leurs hypothèses et vérifiez ces hypothèses (multiplication d'une inégalité par un terme positif)
- → Relisez la démonstration pour voir si elle est claire et vérifier que vous n'avez pas oublié de cas

1.3. Quelques erreurs à éviter

- → attention aux négations
- → quelques exemples ne font pas une démonstration
- → attention aux notations : ne pas donner le même nom à deux objets différents et ne pas supposer que deux objets ayant deux noms distincts sont distincts.

2. Montrer que (P ou Q) est vraie

Pour montrer que l'assertion (P *ou* Q) est vraie, on peut montrer que l'une des deux assertions P ou Q est vraie. On peut également montrer que si l'une des deux propositions est fausse, alors l'autre est vraie. En pratique, on utilise la deuxième méthode sauf si l'une des deux propositions est vérifiée de manière évidente.

Exercice - Soit x un entier relatif. Montrer que (x est impair ou x^2 est pair).

---

3. Montrer une implication

3.1. Méthode directe

Soit deux assertions P et Q. On veut montrer que l'assertion $P \Longrightarrow Q$ est vraie. Si P est fausse, l'assertion $P \Longrightarrow Q$ est vraie, quelle que soit la valeur de vérité de Q Il suffit donc de se placer dans le cas où P est vraie et montrer que Q est vraie.
Le début de la démonstration s'écrit donc : "Supposons que P soit vraie. Montrons alors que Q est vraie".

Exercice - Soit x un réel. Montrer que $(x^2 \leq x \Longrightarrow |x| = x)$.

3.2. Par contraposition

PROPOSITION - Les assertions $(P \Longrightarrow Q)$ et $\big((non\ Q) \Longrightarrow (non\ P)\big)$ ont la même valeur de vérité.
Le raisonnement par contraposition s'utilise lorsque l'assertion $(non\ Q)$ est plus facile à formaliser que P ou lorsqu'il parait plus simple de passer de $(non\ Q)$ à $(non\ P)$ que de P à Q.

Exercice - Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que, (n^2 impair $\Longrightarrow n$ impair).

---

4. Montrer une équivalence

4.1. Par deux implications

Il est fortement conseillé de démontrer une équivalence $P \Longleftrightarrow Q$ en montrant que les deux implications $P \Longrightarrow Q$ et $Q \Longrightarrow P$ sont vraies.

Exercice - Résoudre $x = \sqrt{2-x}$.

4.2. Cas de plusieurs équivalences

Pour montrer que $P \Longleftrightarrow Q \Longleftrightarrow R$, on n'est pas obligé de montrer 6 implications. Il suffit de montrer que les trois assertions $P \Longrightarrow Q$, $Q \Longrightarrow R$ et $R \Longrightarrow P$ sont vraies.

5. Ensembles

5.1. Montrer une inclusion d'ensembles

Soit A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. Pour montrer que $A \subset B$, on cosidére un élément quelconque de l'ensemble A et on montre qu'il est élément de B.

Exercice - Montrer que $A \subset A \cup B$ et $A \cap B \subset A$.

5.2. Montrer une égalité d'ensembles

Pour montrer que deux ensembles A et B sont égaux, on montre que $A \subset B$ et $B \subset A$.

6. Méthodes indirectes

6.1. Raisonnement par l'absurde

dans une théorie mathématique, une assertion est soit vraie, soit fausse ; elle ne peut être les deux à la fois. Montrer qu'une assertion P est vraie est donc équivalent à montrer que l'assertion (*non* P) est fausse. Le raisonnement par l'absurde consiste à supposer que (*non* P) est une assertion vraie (on rajoute donc une hypothèse) et à essayer de trouver une contradiction, par exemple qu'une assertion Q est vraie ainsi que sa négation.

Exercice - Montrer que 0 n'est pas racine de $A(x) = x^4 + 12x - 1$.
On raisonne par l'absurde. Supposons que 0 soit racine de A. *Par définition, on aurait donc* $A(0) = 0$ *; or le calcul montre que* $A(0) = -1$, *d'où* $-1 = 0$. *On obtient une contradiction.*

Remarque - Le raisonnement par l'absurde s'utilise en particulier pour montrer qu'un ensemble est vide (on suppose qu'il ne l'est pas et on considère un élément de cet ensemble) ou encore pour montrer l'unicité d'un certain élément (on suppose qu'il y en a deux distincts et on cherche une contradiction).

6.2. Disjonction des cas

Une assertion P peut se manipuler plus facilement si on suppose qu'une proposition Q est également vraie. Dans ce cas, on démontre les deux assertions (P *et* (Q) et $\big(P$ *et* (*non* $Q)\big)$.

Exercice - Résoudre $\sqrt{x-1} \geq x - 4$.

---

7. Raisonnement par récurrence

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des *entiers naturels*.
Le raisonnement par récurrence s'applique aux propositions dont l'énoncé dépend d'un entier naturel n. Il est une conséquence de la construction de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ (basée sur les axiomes de Peano). Ce raisonnement peut prendre différentes formes ; nous étudierons le cas de la récurrence simple.

Si les hypothèses suivantes sont vérifiées
• la propriété est vraie en n_0,
• lorsque la propriété est vraie pour $k \geq n_0$, elle est vraie pour $k + 1$,
alors la propriété est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Exercice - Montrer que, pour tout entier naturel n, $2^n > n$.

Remarques - • Définissez clairement l'hypothèse de récurrence, donnez-lui un nom qui mette en évidence qu'elle dépend d'un entier.
• Si l'hypothèse de récurrence ne vous est pas donnée, il faut essayer de la découvrir avec les cas $n = n_0$, $n = n_0 + 1, \ldots$

SOMME ET PRODUIT

Soit p et q deux entiers naturels avec $p \leq q$ et f une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$. On note $\sum_{i=p}^{q} f(i)$ la somme des nombres $f(i)$ lorsque i varie de p à q :

$$\sum_{i=p}^{q} f(i) = f(p) + f(p+1) + \cdots + f(q-1) + f(q).$$

$\prod_{i=p}^{q} f(i)$ le produit de ces mêmes termes :

$$\prod_{i=p}^{q} f(i) = f(p) \times f(p+1) \times \cdots \times f(q-1) \times f(q).$$

Remarques - • $\displaystyle\sum_{i=p}^{q} f(i) = \sum_{j=p}^{q} f(j)$.

• $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f(i) = \sum_{i=1}^{n-1} f(i) + f(n)$.

Exemples - • $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} 1 = n$

• $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} 1 = 1$

Remarque - La récurrence ne sert pas qu'à démontrer certaines propriétés sur l'ensemble des entiers naturels ; elle permet de donner des définitions. Par exemple, le symbole $\sum$ est défini de manière correcte par

$$\text{pour } q-p=0 \quad \sum_{i=p}^{q} f(i) = f(p)$$

$$\text{si } q \geq p \geq 0 \quad \sum_{i=p}^{q+1} f(i) = \sum_{i=p}^{q} f(i) + f(q+1)$$

Exemple - Pour n entier naturel, calculer la somme

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} (2i+1).$$

On peut commencer par étudier les cas $n = 1, n = 2$, etc. On trouve $S_0 = 1$, $S_1 = 4$, $S_2 = 9$ et on peut deviner que l'on a $S_n = (n+1)^2$ pour tout n. Reste à le vérifier en écrivant une démonstration de cette proposition.

• *Démonstration* - On va montrer que pour tout entier n, on a :

$$\sum_{i=0}^{n} (2i+1) = (n+1)^2.$$

Pour n entier naturel, notons S_n la somme

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} (2i+1).$$

et $\mathbf{P}(n)$ la propriété $S_n = (n+1)^2$. Il faut montrer que $\mathbf{P}(n)$ est vraie pour tout n. On procède par récurrence sur n.

Montrons que $\mathbf{P}(0)$ est vraie. Pour $n = 0$, on a :

$$S_0 = \sum_{i=0}^{0} (2i+1) = 1 \quad \text{et} \quad (n+1)^2 = 1.$$

Donc $\mathbf{P}(0)$ est vraie.

Soit k un entier tel que $\mathbf{P}(k)$ est vraie ; montrons qu'alors $\mathbf{P}(k+1)$ est vraie. L'hypothèse est $S_k = (k+1)^2$ et on veut montrer que l'on a $S_{k+1} = (k+2)^2$. Or on a :

$$S_{k+1} = \sum_{i=0}^{k+1} (2i+1) = S_k + (2k+3).$$

En utilisant l'hypothèse, on obtient :

$$S_{k+1} = (k+1)^2 + (2k+3) = k^2 + 4k + 4 = (k+2)^2.$$

Donc $\mathbf{P}(k+1)$ est vraie.
On a donc montré que $\mathbf{P}(n)$ est vraie pour tout n, ce qui est équivalent au résultat cherché.
• *Commentaire* - L'utilisation d'une récurrence permet très souvent de répondre à ce type de question. Il faut prendre la peine de bien préciser l'hypothèse de récurrence, de lui donner un nom (ici $\mathbf{P}(n)$) et de bien signaler les étapes. Il faut également faire attention au démarrage : vérifiez que le passage de k $k+1$ marche dès le départ et qu'il n'y ait pas un cas particulier pour n_0, $n_0+1, \ldots$

Exercice - 1°) Montrer, par récurrence sur n, que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$.

---

8. Les quantificateurs

8.1. Le quantificateur universel

Supposons que l'on ait à démontrer une assertion du type $\big(\forall x \in E,\ P(x)\big)$. La démonstration consiste généralement par : soit x un élément (quelconque) de E, montrons que l'assertion $P(x)$ est vraie.
Cette écriture fixe l'élément x mais ne lui impose aucune particularité autre que d'appartenir à E.

Remarque - Si $E = \mathbb{N}$, penser à la récurrence.

8.2. Contre-exemple

Pour montrer qu'une assertion du type $\big(\forall x \in E,\ P(x)\big)$ est fausse, il suffit de montrer que sa négation $\big(\exists x \in E,\ non\ P(x)\big)$ est vraie. Il suffit donc de trouver un élément x de E qui vérifie ($non\ P(x)$) : on dit qu'on a trouvé un contre-exemple.

8.3. Le quantificateur existenciel

On veut démontrer une assertion du type $\big(\exists x \in E,\ P(x)\big)$. Ces propriétés sont souvent plus difficiles à montrer, sauf si on peut se rattacher à un théorème d'existence déjà connu. Le plus souvent, on est amené à construire l'élément x vérifiant P. Il faut alors essayer d'analyser le problème pour avoir l'intuition d'une solution possible. Il ne reste ensuite qu'à vérifier que le x ainsi construit vérifie bien P et qu'il est bien élément de E.

Exercice - Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $x = \sqrt{x} + 6$.
Si x existe, alors il vérifie $(x-6)^2 = x$, d'où $x = 4$ ou $x = 9$. On vérifie que $x = 9$ convient.

TABLE DES MATIERES

IV - Quelques types de raisonnement 17

1. Aide à la rédaction d'un raisonnement 17
   1.1. Analyse du problème 17
   1.2. Rédaction d'une démonstration 17
   1.3. Quelques erreurs à éviter 17
2. Montrer que (P ou Q) est vraie 17
3. Montrer une implication 17
   3.1. Méthode directe 18
   3.2. Par contraposition 18
4. Montrer une équivalence 18
   4.1. Par deux implications 18
   4.2. Cas de plusieurs équivalences 18
5. Ensembles 18
   5.1. Montrer une inclusion d'ensembles 18
   5.2. Montrer une égalité d'ensembles 18
6. Méthodes indirectes 18
   6.1. Raisonnement par l'absurde 18
   6.2. Disjonction des cas 19
7. Raisonnement par récurrence 19
8. Les quantificateurs 21
   8.1. Le quantificateur universel 21
   8.2. Contre-exemple 21
   8.3. Le quantificateur existenciel 21