Chapitre 1

MAJORER, MINORER

1. Les règles de base des inégalités

1.1. Axiomes de construction

L'ensemble des réels est muni d'une relation notée $\leq$ qui vérifie les axiomes suivants :

i) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad x \leq x$ (réflexivité) ;
ii) pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\quad (x \leq y$ et $y \leq x \Longrightarrow x = y)$ (antisymétrie) ;
iii) pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\quad (x \leq y$ et $y \leq z \Longrightarrow x \leq z)$ (transitivité) ;
iv) pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\quad (x \leq y$ ou $y \leq x)$ (ordre total) ;
v) pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\quad (x \leq y \Longrightarrow x+z \leq y+z)$ ($\leq$ est compatible avec l'addition) ;
vi) pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\quad (0 \leq x$ et $0 \leq y \Longrightarrow 0 \leq xy)$ (Le produit de deux réels positifs ou nuls est positif ou nul).

A partir de la relation $\leq$, on définit la relation : $\geq$ par $x \geq y$ si, et seulement si, $y \leq x$.
La relation $x \leq y$ se dit x est inférieur ou égal à y.
La relation $x \geq y$ se dit x est supérieur ou égal à y.
Si $x \leq y$, on dit que x minore y ou que y majore x.
Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, on dit a est un majorant de E si a majore tous les éléments de E. Par exemple, 2 est un majorant de $[-1, 1]$. 1 en est aussi un majorant. De même, on dit que a est un minorant de E s'il minore tous les éléments de E. On dit que E est un ensemble borné s'il est majoré et minoré.

Exercice - Quels sont les axiomes utilisés dans le calcul suivant ?
Si $2x \leq 6$ *et* $0 \leq 3 - x$*, alors* $2x - 6 \leq 0$ *et* $0 \leq 3 - x$*. D'où* $2x - 6 \leq 3 - x$*. On en déduit que* $3x \leq 9$.

On définit la relation $<$ par

$$x < y \text{ si, et seulement si, } (x \leq y \text{ et } x \neq y)$$

On dit que x est strictement inférieur à y. Cette relation ne vérifie pas l'axiome (i). Ce n'est pas une relation d'ordre. (Ellle ne vérifie pas (iv) également).

Exercice - 1°) Si $x < 2$*, a-t-on* $x \leq 2$ *?*
2°) Montrer que $a \leq b$ *si, et seulement si,* $a - b \leq 0$.
Si $a \leq b$*, alors* $a + (-b) \leq b + (-b)$ *d'après* (v)*. Donc* $a - b \leq 0$.
Si $a - b \leq 0$*, alors* $a - b + b \leq 0 + b$ *d'après* (v)*. Donc* $a \leq b$.

Remarque - Ce résultat est très utile : pour comparer deux nombres entre eux, il est souvent plus simple de comparer leur différence au réel 0.

1.2. Nombres réels positifs ou nuls, négatifs ou nuls

D'après (iv), pour tout couple $(0, a)$ de réels, on a $a \leq 0$ ou $0 \leq a$.
Si on a $a \leq 0$, on dit que a est négatif ou nul. On note $\mathbb{R}_-$ l'ensemble des réels négatifs ou nuls.
Si on a $0 \leq a$, on dit que a est positif ou nul. On note $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des réels positifs ou nuls.
Si on a $a \leq 0$ et $0 \leq a$, alors $a = 0$ d'après l'axiome (iii).

Si $0 < a$, on dit que a est strictement positif. On note $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des réels strictement positifs.
Si $a < 0$, on dit que a est strictement négatif. On note $\mathbb{R}_-^*$ l'ensemble des réels strictement négatifs.

Remarque - Par abus de langage, on dit souvent "positif" pour "positif ou nul".

Exercice - Montrer que, si $a \in \mathbb{R}_+$, alors $-a \in \mathbb{R}_-$.
On a $0 \leq a$, donc $0 + (-a) \leq a + (-a)$ d'après (v), i.e. $-a \leq 0$.

1.3. Règles des signes

Le produit de deux réels positifs est positifs. (C'est l'axiome (vi)).
Le produit d'un réel positif et d'un réel négatif est négatif. En effet, soit $a \leq 0$ et $0 \leq b$, alors $0 \leq -a$ et, d'après l'axiome (vi), on obtient $0 \leq -ab$. D'où $ab \leq 0$.
On montre de même que le produit de deux réels négatifs est positif.

Exercice - Montrer que la fonction carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
Soit $0 \leq a \leq b$. On a $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$, or $0 \leq a + b$. D'après les règles des signes $b^2 - a^2$ a le même signe que $b - a$. On en déduit que $0 \leq b^2 - a^2$.
On montre de façon similaire que la fonction inverse est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

1.4. Multiplication d'une inégalité par un réel

$$\boxed{\text{Soit } 0 \leq a \text{ et } b \leq c. \text{ Alors } ba \leq ca.}$$

En effet, d'après (v), $0 = b + (-b) \leq c + (-b)$ et, d'après (vi) $0 \leq a(c - b)$. On obtient le résultat en utilisant à nouveau (v).

$$\boxed{\text{Soit } a \leq 0 \text{ et } b \leq c. \text{ Alors } ca \leq ba.}$$

En effet, d'après (v), $0 = b + (-b) \leq c + (-b)$. Un exercice précédent a montré que $0 \leq -a$. D'où, d'après (vi) $0 \leq -a(c-b)$. On obtient le résultat en utilisant à nouveau (v) et le même exercice.

⚠ **Si on multiplie une inégalité par un nombre positif, on ne change pas le sens de l'inégalité ; si on multiplie une inégalité par un nombre négatif, on change le sens de l'inégalité.**

Exercice - Montrer que, pour tous les réels x, y, z et t tels que $x \leq y$ et $z \leq t$, on a $x + z \leq y + t$.
D'après (v), $x + z \leq y + z$. Or, toujours d'après (v), $y + z \leq y + t$. En utilisant (iii), on obtient $x + z \leq y + t$.

Il n'y a aucune condition de signe nécessaire pour additionner des inégalités.

⚠ **On ne peut pas soustraire des inégalités.** Si l'on veut majorer un terme de la forme $a - c$, on doit majorer a et minorer c. En effet, si $a \leq b$ et $c \geq d$, alors $-c \leq -d$ (multiplication par un réel négatif), d'où $a + (-c) \leq b + (-d)$, i.e. $a - c \leq b - d$.

1.5. Multiplication de deux inégalités positives

$$\boxed{\text{Si } 0 \leq a \leq b \text{ et } 0 \leq c \leq d, \text{ alors } 0 \leq ac \leq bd}$$

En effet $0 \leq ac \leq ad$ car $a \geq 0$ et $ad \leq bd$ car $d \geq 0$. On en déduit que $0 \leq ac \leq bd$ d'après (iii).

⚠ **On ne peut multiplier entre elles que des inégalités positives.** Si l'on a des inégalités qui ne vérifient pas cette condition, il peut être nécessaire d'utiliser des cas en séparant les inégalités en deux : la partie positive et la partie négative. En multipliant cette deuxième inégalité par -1, on obtient une inégalité positive.

⚠ **Pour majorer un terme de la forme $\frac{a}{b}$ avec a et b strictement positifs, il suffit de majorer a et de minorer b.** En effet, si $0 < a \leq c$ et $b \geq d > 0$, alors $\frac{1}{b} \leq \frac{1}{d}$ par croissance de la fonction inverse et $0 < \frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ par produit de deux inégalités positives.

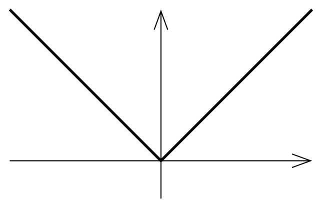
2. Valeur absolue

2.1. Définition

La valeur absolue d'un réel x, notée $|x|$ est définie par

$$|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$

On en déduit que $|x|$ est toujours un réel positif, qui ne peut être nul que si $x = 0$.



Exercice - Soit a et h deux réels avec $h \geq 0$. Montrer que $|a| \leq h$ si, et seulement si, $-h \leq a \leq h$.

2.2. Première inégalité triangulaire

$$\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad |a+b| \leq |a| + |b|.}$$

Comme $|a-b| = |a+(-b)|$, on a également $|a-b| \leq |a| + |-b| = |a| + |b|$.

On fait la preuve dans le cas $a \geq 0$ et $b \leq 0$. Les autres cas se traitent d'une façon similaire.
Supposons $a+b \geq 0$, alors $|a+b| = a+b$, or $a \geq 0$ et $b \leq 0$ donc $|a|+|b| = a-b$. Comme $b \leq 0$, on a $b \leq -b$ et on en déduit que $a+b \leq a-b$.
Supposons $a+b \leq 0$, alors $|a+b| = -a-y$, or $a \geq 0$ et $b \leq 0$ donc $|a|+|b| = a-b$. Comme $a \geq 0$, on a $-a \leq a$ et on en déduit que $-a-b \leq a-b$.

2.3. Deuxième inégalité triangulaire

$$\boxed{\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad \big| |a| - |b| \big| \leq |a-b|.}$$

On a également $\big| |a| - |b| \big| \leq |a+b|$.

$\big| |a| - |b| \big| \leq |a-b|$ est équivalent à $-|a-b| \leq |a| - |b| \leq |a-b|$.
On a donc à prouver les deux inégalités

$$\begin{cases} -|a-b| \leq |a| - |b| \\ |a| - |b| \leq |a-b| \end{cases} \iff \begin{cases} |b| \leq |a| + |a-b| \\ |a| \leq |a-b| + |b| \end{cases}$$

La première inégalité s'obtient en écrivant $|b| = |b-a+a|$ et en utilisant la première inégalité triangulaire. On fait de même pour la deuxième inégalité à prouver.

3. Intervalles

Définition - I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si, et seulement si, pour tout a et b dans I tel que $a < b$, si $a < x < b$, alors $x \in I$.
En d'autres termes, les intervalles de $\mathbb{R}$ sont exactement les parties convexes de $\mathbb{R}$.

Soit $a < b$ deux réels, on appelle

- intervalle ouvert d'extrémités a et b l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ et on le note $]a,b[$.
- intervalle fermé d'extrémités a et b ou segment l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ et on le note $[a,b]$.
- intervalle semi-fermé ou semi-ouvert d'extrémités a et b les ensembles $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ noté $]a,b]$ et $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ noté $[a,b[$

Ces ensembles sont bien des intervalles au sens de la définition précédente. Ils sont bornés (minorés par a et majorés par b).

On définit également des intervalles non bornés par :

– $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$
– $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$
– $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$
– $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$

Remarque - Les symboles $+\infty$ (lire plus l'infini) et $-\infty$ (lire moins l'infini) ne désignent pas des réels, mais permettent l'extension de manière simple de la notion d'intervalles.

Lemme - Tout intervalle de $\mathbb{R}$ est de l'un des types suivants $\emptyset$, $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$, $]a, b[$, $[a, +\infty[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, b[$, $]-\infty, b]$, $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

Exercice - Soit a et a_0 deux réels et h un réel strictement positif. Montrer que $|a - a_0| \leq h$ si, et seulement si, $a \in [a_0 - h; a_0 + h]$.

En effet, si $a - a_0 \geq 0$, alors

$$|a - a_0| \leq h \iff 0 \leq a - a_0 \leq h \iff a_0 \leq a \leq a_0 + h.$$

De même, si $a - a_0 \leq 0$, alors

$$|a - a_0| \leq h \iff 0 \leq a_0 - a \leq h \iff -h \leq a - a_0 \leq 0 \iff a_0 - h \leq a \leq a_0.$$

En regroupant ces deux cas, on obtient le résultat.

---

4. Inéquations

Soit f et g définies sur un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Résoudre l'inéquation $f(x) \leq g(x)$, c'est chercher l'ensemble des réels x qui vérifient l'inégalité $f(x) \leq g(x)$. Les réels obtenus sont appelés les solutions de l'inéquation.

Remarque - L'inéquation $f(x) \leq g(x)$ est équivalente (i.e. qu'elle a le même ensemble de solutions) à l'inéquation $f(x) - g(x) \leq 0$ ou encore à $0 \leq g(x) - f(x)$.

Exercice - Résoudre l'inéquation $2x - 7 \leq x + 4$.

---

5. Fonctions et inégalités

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Définition :

- L'application f est croissante sur I si
$$\forall (x, x') \in I^2, \big(x < x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')\big)$$
- L'application f est décroissante sur I si
$$\forall (x, x') \in I^2, \big(x < x' \Rightarrow f(x) \geq f(x')\big)$$
- L'application f est strictement croissante sur I si
$$\forall (x, x') \in I^2, \big(x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')\big)$$
- L'application f est strictement décroissante sur I si
$$\forall (x, x') \in I^2, \big(x < x' \Rightarrow f(x) > f(x')\big)$$
- L'application f est dite monotone si elle est croissante sur I ou décroissante sur I.

La monotonie de certaines fonctions (comme $x \mapsto x^2$ ou $x \mapsto 1/x$) s'obtient en utilisant les règles de calculs rappelées au 1. Mais on peut également prouver la montonie d'une fonction en étudiant le signe de sa dérivée. On obtient alors des nouvelles égalités : par exemple, la fonction logarithme est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ car sa dérivée est $x \mapsto 1/x$. On en déduit que, si $0 < a < b$ alors $\ln a < \ln b$.

Remarque - Une autre technique pour obtenir des inégalités est l'utilisation de limites connues. Cette méthode sera vue dans un autre enseignement.

6. Valeurs approchées d'un réel

6.1. Encadrement et amplitude

Dire que les deux réels a et b encadrent le réel x, c'est avoir $a \leq x \leq b$ ou encore $x \in [a, b]$. La différence $b - a$ s'appelle l'amplitude de l'encadrement. Plus cette amplitude est réduite et plus l'encadrement est précis.

Remarque - En général, a et b sont des nombres décimaux, mais on peut aussi encadrer 1.5 par $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$. Par exemple, 1.41 et 1.42 encadrent $\sqrt{2}$ avec une amplitude de 0.01. (En effet, $(1.41)^2 \leq 2 \leq (1.42)^2$.)

6.2. Approximation

Dire que le réel a est une approximation à α-près du réel x signifie que les nombres $a - \alpha$ et $a + \alpha$ encadrent le réel x, i.e. $a - \alpha \leq x \leq a + \alpha$.

6.3. Approximation par défaut

Dire que le réel a est une approximation par défaut à α-près du réel x signifie que les nombres a et $a + \alpha$ encadrent le réel x, i.e. $a \leq x \leq a + \alpha$.
La troncature est en fait une approximation par défaut.

6.4. Approximation par excès

Dire que le réel a est une approximation par excès à α-près du réel x signifie que les nombres $a - \alpha$ et a encadrent le réel x, i.e. $a - \alpha \leq x \leq a$.

6.5. Valeurs approchées

Soit x un réel dont on connaît un encadrement : $a \leq x \leq b$. Dans les calculs approchés, on remplace le nombre x par un nombre α de l'intervalle $[a, b]$; α est une valeur approchée de x. L'erreur commise est égale à $|x - \alpha|$, que l'on majore par la plus grande des deux valeurs $\alpha - a$ et $b - \alpha$.

Exercice - Soit $3.14 \leq x \leq 3.95$ *et* $3.41 \leq y \leq 3.91$. *Calculer un encadrement de* $x + y$, *le plus précis possible. Mêmes questions pour* $x - y$, xy *et* x/y.

Chapitre 2

Ensembles et sous-ensembles

1. Notion d'ensemble - Elément d'un ensemble

Dans une théorie mathématique, il est rare qu'un objet intervienne seul ; d'où l'idée de considèrer des collections, groupements, familles, etc. d'objets, les objets ansi "regroupés" étant désignés par individu, membre, élément, etc. Pour traduire ces deux idées complémentaires, les mathématiciens ont choisi les mots **ensemble** et **élément**.
Un *ensemble* est donc une collection d'objets satisfaisant un certain nombre de propriétés et chacun de ces objets est appelé *élément* de cet ensemble.
Un ensemble est bien déterminé si l'on peut répondre par oui ou par non à la question : tel objet appartient-il à cet ensemble et ceci quel que soit l'objet considéré.
Si x est un élément de l'ensemble E, on dit aussi que x *appartient à* E et on note $x \in E$. Si x n'appartient pas à E, on note $x \notin E$. Deux ensembles sont *égaux* s'ils ont les mêmes éléments.

Remarque - Un ensemble peut être un élement d'un autre ensemble. Par exemple, si un fleuriste présente dans une corbeille un ensemble de bouquets de roses, chaque bouquet doit être considéré comme un élément de l'ensemble $\mathscr{B}$ des bouquets. Par contre aucune rose n'est un élément de cet ensemble $\mathscr{B}$; chacun d'elles est un élément du bouquet où elle figure, bouquet qui peut alors être considéré comme un ensemble de roses. Nous constatons que suivant les circonstances un même objet peut être considéré soit comme un élément soit comme un ensemble.

On admet l'existence d'un ensemble n'ayant aucun élément. Cet ensemble est appelé *ensemble vide* et noté $\emptyset$.

2. Comment définir un ensemble

2.1. Les ensembles déjà rencontrés

Vous avez déjà travaillé sur des ensembles de nombres ; ils ont un nom qui les définit entièrement. Par exemple, $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels ; $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ désignent respectivement l'ensemble des entiers relatifs, des nombres rationnels, des nombres réels et des nombres complexes ; $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+^*$ désignent les réels non nuls, les réels positifs, les réels strictement positifs, etc.

2.2. Ensemble défini en extension

On définit un ensemble en extension en présentant la liste des éléments qui le forment. Cette liste est placée entre accolades $\{\quad\}$, les éléments étant séparés par une virgule ou un point-virgule. L'ordre de présentation des éléments n'intervient pas et chaque élément ne peut figurer qu'une seule fois dans la liste.
Par exemple, l'ensemble E dont les éléments sont 1, 2, 3, 4 est noté $E = \{1, 2, 3, 4\}$; l'ensemble des lettres du mot *mathématiques* est $\{m, a, t, h, e, i, q, u, s\}$.
Un ensemble à un seul élément x est noté $\{x\}$ et on l'appelle le *singleton* $\{x\}$. On a donc $x \in \{x\}$ (et pas $x = \{x\}$). Un ensemble à deux éléments est appelé une paire.

Cette écriture ne peut raisonnablement s'appliquer qu'à des ensembles ayant un "petit" nombre d'éléments.

2.3. Ensemble défini en compréhension

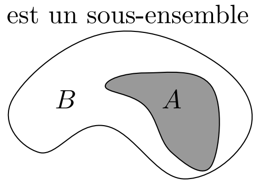
On peut énoncer une propriété telle que tout élément qui la possède appartient à l'ensemble et tout élément qui ne la possède pas n'appartient pas à l'ensemble.
On note de la manière suivante l'ensemble F dont les éléments sont les éléments x d'un ensemble E possèdant la propriété $P(x)$

$$F = \{x \in E \mid P(x)\}$$

On lit que F est l'ensemble des éléments x de E tels que x possède la prorpiété P. Par exemple, l'ensemble E' dont les éléments sont les entiers naturels x tels que $x \leq 4$ est noté $E' = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x \leq 4\}$ (et on a aussi $E' = \{0, 1, 2, 3, 4\}$).
L'intervalle $[0, 1[$ s'écrit en compréhension : $I = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$.

3. Relation d'inclusion

Définition 2.1 – Soient A et B deux ensembles. On dit que A est inclus dans B si chaque élément de A est un élément de B. On note $A \subset B$. On dit aussi "A est contenu dans B" ou "A est une partie de B" ou "A est un sous-ensemble de B".



$A \subset B$

Remarques - • $A \subset A$ (réflexivité)
• Si $A \subset B$ et $B \subset C$, alors $A \subset C$ (transitivité)
• $A = B$ si et seulement si ($A \subset B$ et $B \subset A$) (antisymétrie).

On peut rapprocher ces propriétés de celles de la relation d'inégalité $\leq$ dans $\mathbb{R}$: pour tous a, b, c réels, on a $a \leq a$, si ($a \leq b$ et $b \leq c$) alors $a \leq c$ et si ($a \leq b$ et $b \leq a$), alors $a = b$. De telles relations sont appelées *relations d'ordre*.

Exemples - • $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$
• $\{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < x < 4\} \subset \mathbb{R}_+$ • Soit E un ensemble. $\emptyset \subset E$

Exercice - Soit $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ pair}\}$ et $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ divisible par } 4\}$. Montrer que $A \subset B$.

Définition 2.2 – Soit E un ensemble. Les sous-ensembles de E forment un ensemble appelé *ensemble des parties de E* et noté $\mathcal{P}(E)$.

Exemple - Si $E = \{1, 2\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, E\}$.

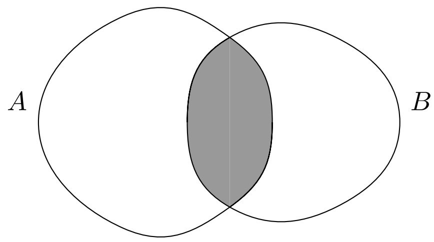
Remarque - Pour dire que x est élément de l'ensemble E, on peut au choix écrire que $x \in E$ ou que $\{x\} \subset E$ ou que $\{x\} \in \mathcal{P}(E)$.

Exercice - 1°) Soit $E = \{1, 2, 3\}$. Donner tous les sous-ensembles de E.
2°) Soient A et B des sous-ensembles d'un ensemble E.
Montrer que ($A \subset B$ si et seulement si $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$).

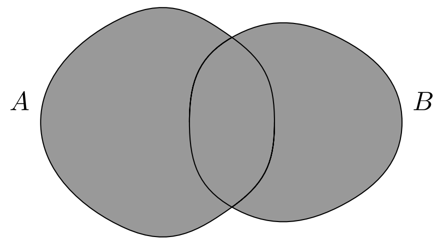
---

4. Intersection et réunion

Définition 2.3 – Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. L'ensemble $\{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$ est appelé l'intersection des ensembles A et B et est noté $A \cap B$. Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont **disjoints**. (*A ne pas confondre avec distinct qui est la négation de égal*)
L'ensemble $\{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$ est appelé l'union des ensembles A et B et est noté $A \cup B$.



$\boxed{A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}}$



$\boxed{A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}}$

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. On a :

1) $A \cap \emptyset = \emptyset$ et $A \cup \emptyset = A$
2) $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$
3) $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$
4) $A \cup B = A$ si et seulement si $B \subset A$
5) $A \cap B = A$ si et seulement si $A \subset B$

Propriétés de $\cap$ et $\cup$ -
Soient A, B, C trois sous-ensembles d'un ensemble E. On a :

1) $A \cup B = B \cup A$
2) $A \cap B = B \cap A$
3) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
4) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
5) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
6) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

On traduit ces propriétés en disant que $\cup$ et $\cap$ sont *commutatives* (propriétés 1 et 2), *associatives* (propriétés 3 et 4), que $\cup$ est *distributive par rapport à* $\cap$ (propriété 5) et $\cap$ est *distributive par rapport à* $\cup$ (propriété 6). Ces propriétés seront étudiées dans un autre module. Pour s'en souvenir, on peut les comparer aux propriétés analogues de l'addition et de la mutiplication dans $\mathbb{R}$: pour a, b, c réels, on a $a + b = b + a$, $ab = ba$, $a + (b + c) = (a + b) + c$, $a(bc) = (ab)c$, $a(b + c) = ab + ac$. Mais on n'a pas l'équivalent de la propriété 5 ; en général, on n'a pas $a + (bc) = ab + ac$ (trouver un exemple).

⚠ Ne pas oublier les parenthèses. Par exemple, $A \cap B \cup C$ n'a pas de sens. Si $A = [0, 1]$, $B = [1, 2]$ et $C = [2, +\infty[$, on a $(A \cap B) \cup C = \{1\} \cup [2, +\infty[$, et $A \cap (B \cup C) = \{1\}$.

Généralisation - Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des sous-ensembles d'un ensemble E, on définit de même la réunion $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ comme l'ensemble des x qui appartiennent à au moins l'un des ensembles $A_1, A_2, \ldots$ ou A_n et l'intersection $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ comme l'ensemble des x qui appartiennent à tous les ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

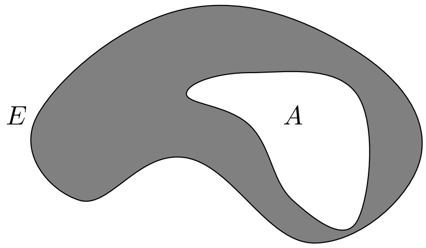
$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{x \mid \exists i \in \{1, 2, ..., n\},\, x \in A_i\}$$
$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{x \mid \forall i \in \{1, 2, ..., n\},\, x \in A_i\}$$

Exercice - *Soient A, B, C, D des sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer que $(A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap C) \cup (B \cap D)$. Simplifier le résultat lorsque l'on a $A \subset C$.*

---

5. Complémentaire d'un ensemble

Définition 2.4 – Soient E un ensemble et A un sous-ensemble de E. Le complémentaire de A dans E est l'ensemble $\{x \,|\, x \in E \text{ et } x \notin A\}$. On le note $\complement_E A$ ou $E \setminus A$ ou encore lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur E, ${}^cA$, A^c ou $\overline{A}$.

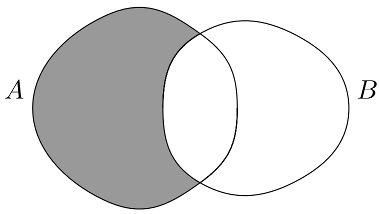


$$\boxed{\complement_E A = \{x \in E\,;\, x \notin A\}}$$

Propriétés du complémentaire (Lois de De Morgan) -
Soient E un ensemble, A et B des sous-ensembles de E.

1) $\complement_E(\complement_E A) = A$
2) $A \subset B$ si et seulement si $(\complement_E B) \subset (\complement_E A)$
3) $\complement_E(A \cup B) = (\complement_E A) \cap (\complement_E B)$
4) $\complement_E(A \cap B) = (\complement_E A) \cup (\complement_E B)$

Définition 2.5 – Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. On note $A \setminus B$ l'ensemble $\{x \in A \,|\, x \notin B\}$ et on l'appelle différence de A et B.



$$\boxed{A \setminus B = \{x \in A\,;\, x \notin B\}}$$

Remarques - • Lorsque l'on a $B \subset A$, la différence de A et B est aussi le complémentaire de B dans A.
• $A \setminus B = A \cap B^c$.
• $A \subset B$ si et seulement si $A \setminus B = \emptyset$.

⚠ Ne pas oublier les parenthèses.
Trouver un exemple d'ensembles vérifiant $(A \setminus B) \setminus C \neq A \setminus (B \setminus C)$.

Exercice - *1°) Soient $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 3x + 1 > 0\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$.*
Montrer que les ensembles $A^c, B^c, A \cap B, A \cup B, A \setminus B$ et $B \setminus A$ sont des intervalles ou des réunions d'intervalles et préciser lesquels.
2°) Soient A et B des sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
1) $A = B$ 2) $A \setminus B = B \setminus A$
3°) Même question pour les cinq propriétés suivantes. (On peut montrer qu'elles sont toutes équivalentes à la première) :

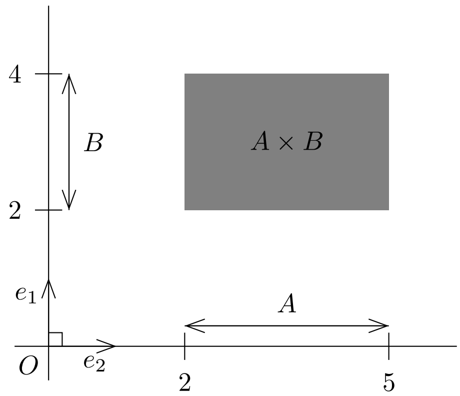
1) $A \subset B$ 2) $B^c \subset A^c$ 3) $A \cap B = A$
4) $A \cup B = B$ 5) $A \setminus B = \emptyset$

---

6. Produit

Définition 2.6 – - Soient E et F deux ensembles, x un élément de E et y un élément de F. Le couple (x, y) est la donnée des deux éléments x et y dans cet ordre. Les éléments x et y sont appelés respectivement première et deuxième coordonnée du couple (x, y). Deux couples (x, y) et (x', y') sont égaux si et seulement si on a $(x = x' \text{ et } y = y')$. Le produit cartésien $E \times F$ est l'ensemble des couples (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$.

Exemples - • Si $E = F = \mathbb{R}$, le produit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est aussi noté $\mathbb{R}^2$. On le représente souvent par l'ensemble des points du plan affine euclidien, en choisissant un repère orthonormé (O, e_1, e_2). Le couple (x, y) est représenté par le point d'abscisse x et d'ordonnée y.
• Si $A = [2, 5]$ et $B = [2, 4]$, le produit $A \times B$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ qui peut être représenté par le rectangle sur la figure ci-dessous.



Remarques - • Il ne faut pas confondre le couple (x, y) et l'ensemble $\{x, y\}$. Si $x \neq y$, on a $(x, y) \neq (y, x)$, mais $\{x, y\} = \{y, x\}$. Le couple (x, x) est représenté par un point de la première diagonale et l'ensemble $\{x, x\}$ est le singleton $\{x\}$.
• $A \subset E$ et $B \subset F$ si et seulement si $A \times B \subset E \times F$.
• Un produit cartésien de deux ensembles est vide si et seulement si l'un au moins des deux ensembles est vide.

Généralisation - Si on considère des ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$, on peut de même définir les n-uples $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ où $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \ldots, x_n \in E_n$ et le produit $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$. En particulier, $\underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ facteurs}}$ est encore noté $\mathbb{R}^n$. De même, on note E^n l'ensemble $\underbrace{E \times \ldots \times E}_{n \text{ facteurs}}$.

Exercice - Soit $A = B = \{1, 2\}$. Donner tous les sous-ensembles de $A \times B$.

TABLE DES MATIERES