Chapitre 2

Ensembles et sous-ensembles

1. Notion d'ensemble - Elément d'un ensemble

Dans une théorie mathématique, il est rare qu'un objet intervienne seul ; d'où l'idée de considèrer des collections, groupements, familles, etc. d'objets, les objets ainsi "regroupés" étant désignés par individu, membre, élément, etc. Pour traduire ces deux idées complémentaires, les mathématiciens ont choisi les mots **ensemble** et **élément**.
Un *ensemble* est donc une collection d'objets satisfaisant un certain nombre de propriétés et chacun de ces objets est appelé *élément* de cet ensemble.
Un ensemble est bien déterminé si l'on peut répondre par oui ou par non à la question : tel objet appartient-il à cet ensemble et ceci quel que soit l'objet considéré.
Si x est un élément de l'ensemble E, on dit aussi que x *appartient* à E et on note $x \in E$. Si x n'appartient pas à E, on note $x \notin E$. Deux ensembles sont *égaux* s'ils ont les mêmes éléments.

Remarque - Un ensemble peut être un élément d'un autre ensemble. Par exemple, si un fleuriste présente dans une corbeille un ensemble de bouquets de roses, chaque bouquet doit être considéré comme un élément de l'ensemble $\mathscr{B}$ des bouquets. Par contre aucune rose n'est un élément de cet ensemble $\mathscr{B}$; chacun d'elles est un élément du bouquet où elle figure, bouquet qui peut alors être considéré comme un ensemble de roses. Nous constatons que suivant les circonstances un même objet peut être considéré soit comme un élément soit comme un ensemble.

On admet l'existence d'un ensemble n'ayant aucun élément. Cet ensemble est appelé *ensemble vide* et noté $\emptyset$.

2. Comment définir un ensemble

2.1. Les ensembles déjà rencontrés

Vous avez déjà travaillé sur des ensembles de nombres ; ils ont un nom qui les définit entièrement. Par exemple, $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels ; $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ désignent respectivement l'ensemble des entiers relatifs, des nombres rationnels, des nombres réels et des nombres complexes ; $\mathbb{R}^*$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_+^*$ désignent les réels non nuls, les réels positifs, les réels strictement positifs, etc.

2.2. Ensemble défini en extension

On définit un ensemble en extension en présentant la liste des éléments qui le forment. Cette liste est placée entre accolades $\{\quad\}$, les éléments étant séparés par une virgule ou un point-virgule. L'ordre de présentation des éléments n'intervient pas et chaque élément ne peut figurer qu'une seule fois dans la liste.
Par exemple, l'ensemble E dont les éléments sont 1, 2, 3, 4 est noté $E = \{1, 2, 3, 4\}$; l'ensemble des lettres du mot *mathématiques* est $\{m, a, t, h, e, i, q, u, s\}$.
Un ensemble à un seul élément x est noté $\{x\}$ et on l'appelle le *singleton* $\{x\}$. On a donc $x \in \{x\}$ (et pas $x = \{x\}$). Un ensemble à deux éléments est appelé une paire.

Cette écriture ne peut raisonnablement s'appliquer qu'à des ensembles ayant un "petit" nombre d'éléments.

2.3. Ensemble défini en compréhension

On peut énoncer une propriété telle que tout élément qui la possède appartient à l'ensemble et tout élément qui ne la possède pas n'appartient pas à l'ensemble.
On note de la manière suivante l'ensemble F dont les éléments sont les éléments x d'un ensemble E possédant la propriété $P(x)$

$$F = \{x \in E \mid P(x)\}$$

On lit que F est l'ensemble des éléments x de E tels que x possède la propriété P. Par exemple, l'ensemble E' dont les éléments sont les entiers naturels x tels que $x \leq 4$ est noté $E' = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x \leq 4\}$ (et on a aussi $E' = \{0, 1, 2, 3, 4\}$).
L'intervalle $[0, 1[$ s'écrit en compréhension : $I = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\}$.

2.4. Ensemble défini par une fonction

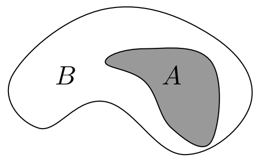
Soit F un sous-ensemble d'un ensemble E et f une application définie sur F. L'ensemble des valeurs prises par $f(x)$ lorsque x parcourt F est noté

$$\{f(x) \mid x \in F\}.$$

Par exemple, si $E = \mathbb{R}$, l'ensemble $\{\cos x \mid x \in [0, 2\pi]\} = [0, 1]$.

3. Relation d'inclusion

Définition 2.1 – Soient A et B deux ensembles. On dit que A est inclus dans B si chaque élément de A est un élément de B. On note $A \subset B$. On dit aussi "A est contenu dans B" ou "A est une partie de B" ou "A est un sous-ensemble de B".



$A \subset B$

Remarques - • $A \subset A$ (réflexivité)
• Si $A \subset B$ et $B \subset C$, alors $A \subset C$ (transitivité)
• $A = B$ si et seulement si ($A \subset B$ et $B \subset A$) (antisymétrie).

On peut rapprocher ces propriétés de celles de la relation d'inégalité $\leq$ dans $\mathbb{R}$: pour tous a, b, c réels, on a $a \leq a$, si ($a \leq b$ et $b \leq c$) alors $a \leq c$ et si ($a \leq b$ et $b \leq a$), alors $a = b$. De telles relations sont appelées *relations d'ordre*.

Exemples - • $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$
• $\{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < x < 4\} \subset \mathbb{R}_+$
• Soit E un ensemble. $\emptyset \subset E$

Exercice - Soit $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ *pair*$\}$ *et* $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ *divisible par* $4\}$. *Montrer que* $A \subset B$.

Définition 2.2 – Soit E un ensemble. Les sous-ensembles de E forment un ensemble appelé *ensemble des parties de E* et noté $\mathcal{P}(E)$.

Exemple - Si $E = \{1, 2\}$, alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, E\}$.

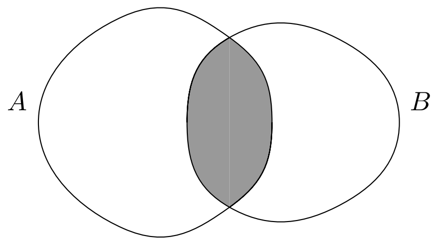
Remarque - Pour dire que x est élément de l'ensemble E, on peut au choix écrire que $x \in E$ ou que $\{x\} \subset E$ ou que $\{x\} \in \mathcal{P}(E)$.

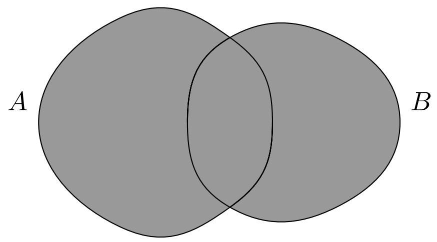
Exercice - 1°) Soit $E = \{1, 2, 3\}$. Donner tous les sous-ensembles de E.
2°) Soient A et B des sous-ensembles d'un ensemble E.
Montrer que ($A \subset B$ si et seulement si $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$).

---

4. Intersection et réunion

Définition 2.3 – Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. L'ensemble $\{x \,|\, x \in A \text{ et } x \in B\}$ est appelé l'intersection des ensembles A et B et est noté $A \cap B$. Si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont **disjoints**. (*A ne pas confondre avec distinct qui est la négation de égal*)
L'ensemble $\{x \,|\, x \in A \text{ ou } x \in B\}$ est appelé l'union des ensembles A et B et est noté $A \cup B$.





$\boxed{A \cap B = \{x \,|\, x \in A \text{ et } x \in B\}}$ $\boxed{A \cup B = \{x \,|\, x \in A \text{ ou } x \in B\}}$

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. On a :

1) $A \cap \emptyset = \emptyset$ et $A \cup \emptyset = A$
2) $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$
3) $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$
4) $A \cup B = A$ si et seulement si $B \subset A$
5) $A \cap B = A$ si et seulement si $A \subset B$

Propriétés de $\cap$ et $\cup$ -
Soient A, B, C trois sous-ensembles d'un ensemble E. On a :

1) $A \cup B = B \cup A$
2) $A \cap B = B \cap A$
3) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
4) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
5) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
6) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

On traduit ces propriétés en disant que $\cup$ et $\cap$ sont *commutatives* (propriétés 1 et 2), *associatives* (propriétés 3 et 4), que $\cup$ est *distributive par rapport* à $\cap$ (propriété 5) et $\cap$ est *distributive par rapport* à $\cup$ (propriété 6). Ces propriétés seront étudiées dans un autre module. Pour s'en souvenir, on peut les comparer aux propriétés analogues de l'addition et de la mutiplication dans $\mathbb{R}$: pour a, b, c réels, on a $a + b = b + a$, $ab = ba$, $a + (b + c) = (a + b) + c$, $a(bc) = (ab)c$, $a(b + c) = ab + ac$. Mais on n'a pas l'équivalent de la propriété 5 ; en général, on n'a pas $a + (bc) = ab + ac$ (trouver un exemple).

⚠ Ne pas oublier les parenthèses. Par exemple, $A \cap B \cup C$ n'a pas de sens. Si $A = [0, 1]$, $B = [1, 2]$ et $C = [2, +\infty[$, on a $(A \cap B) \cup C = \{1\} \cup [2, +\infty[$, et $A \cap (B \cup C) = \{1\}$.

Généralisation - Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont des sous-ensembles d'un ensemble E, on définit de même la réunion $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ comme l'ensemble des x qui appartiennent à au moins l'un des ensembles $A_1, A_2, \ldots$ ou A_n et l'intersection $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ comme l'ensemble des x qui appartiennent à tous les ensembles $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

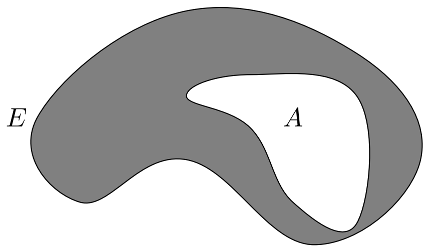
$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{x \,|\, \exists i \in \{1, 2, ..., n\},\, x \in A_i\}$$
$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{x \,|\, \forall i \in \{1, 2, ..., n\},\, x \in A_i\}$$

Exercice - Soient A, B, C, D des sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer que $(A \cup B) \cap (C \cup D) = (A \cap C) \cup (A \cap D) \cup (B \cap C) \cup (B \cap D)$. Simplifier le résultat lorsque l'on a $A \subset C$.

---

5. Complémentaire d'un ensemble

Définition 2.4 – Soient E un ensemble et A un sous-ensemble de E. Le complémentaire de A dans E est l'ensemble $\{x \,|\, x \in E \text{ et } x \notin A\}$. On le note $\complement_E A$ ou $E \setminus A$ ou encore lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur E, ${}^cA$, A^c ou $\overline{A}$.

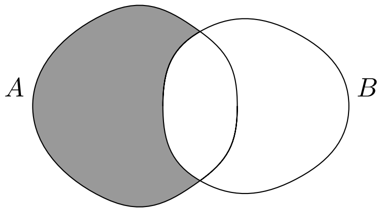


$$\boxed{\complement_E A = \{x \in E\,;\, x \notin A\}}$$

Propriétés du complémentaire (Lois de De Morgan) -
Soient E un ensemble, A et B des sous-ensembles de E.

1) $\complement_E(\complement_E A) = A$
2) $A \subset B$ si et seulement si $(\complement_E B) \subset (\complement_E A)$
3) $\complement_E(A \cup B) = (\complement_E A) \cap (\complement_E B)$
4) $\complement_E(A \cap B) = (\complement_E A) \cup (\complement_E B)$

Définition 2.5 – Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E. On note $A \setminus B$ l'ensemble $\{x \in A \,|\, x \notin B\}$ et on l'appelle différence de A et B.



$$\boxed{A \setminus B = \{x \in A\,;\, x \notin B\}}$$

Remarques - • Lorsque l'on a $B \subset A$, la différence de A et B est aussi le complémentaire de B dans A.
• $A \setminus B = A \cap B^c$.
• $A \subset B$ si et seulement si $A \setminus B = \emptyset$.

⚠ Ne pas oublier les parenthèses.
Trouver un exemple d'ensembles vérifiant $(A \setminus B) \setminus C \neq A \setminus (B \setminus C)$.

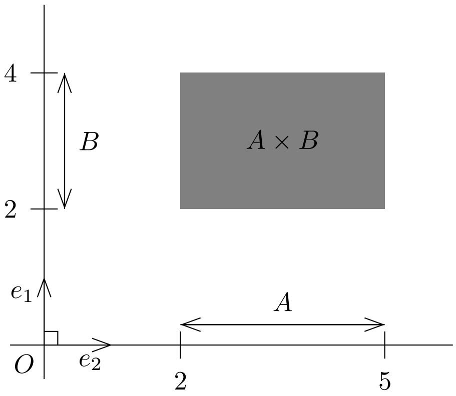
Exercice - 1°) Soient $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 3x + 1 > 0\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$.
Montrer que les ensembles $A^c, B^c, A \cap B, A \cup B, A \setminus B$ et $B \setminus A$ sont des intervalles ou des réunions d'intervalles et préciser lesquels.
2°) Soient A et B des sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1) $A = B$ 2) $A \setminus B = B \setminus A$
3°) Même question pour les cinq propriétés suivantes. (On peut montrer qu'elles sont toutes équivalentes à la première) :
1) $A \subset B$ 2) $B^c \subset A^c$ 3) $A \cap B = A$
4) $A \cup B = B$ 5) $A \setminus B = \emptyset$

6. Produit d'ensembles

Définition 2.6 – Soient E et F deux ensembles, x un élément de E et y un élément de F. Le couple (x, y) est la donnée des deux éléments x et y dans cet ordre. Les éléments x et y sont appelés respectivement première et deuxième coordonnée du couple (x, y). Deux couples (x, y) et (x', y') sont égaux si et seulement si on a $(x = x' \text{ et } y = y')$. Le produit cartésien $E \times F$ est l'ensemble des couples (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$.

Exemples - • Si $E = F = \mathbb{R}$, le produit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est aussi noté $\mathbb{R}^2$. On le représente souvent par l'ensemble des points du plan affine euclidien, en choisissant un repère orthonormé (O, e_1, e_2). Le couple (x, y) est représenté par le point d'abscisse x et d'ordonnée y.
• Si $A = [2, 5]$ et $B = [2, 4]$, le produit $A \times B$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ qui peut être représenté par le rectangle sur la figure ci-dessous.



Remarques - • Il ne faut pas confondre le couple (x, y) et l'ensemble $\{x, y\}$. Si $x \neq y$, on a $(x, y) \neq (y, x)$, mais $\{x, y\} = \{y, x\}$. Le couple (x, x) est représenté par un point de la première diagonale et l'ensemble $\{x, x\}$ est le singleton $\{x\}$.
• $A \subset E$ et $B \subset F$ si et seulement si $A \times B \subset E \times F$.
• Un produit cartésien de deux ensembles est vide si et seulement si l'un au moins des deux ensembles est vide.

Généralisation - Si on considère des ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$, on peut de même définir les n-uples $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ où $x_1 \in E_1, x_2 \in E_2, \ldots, x_n \in E_n$ et le produit $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$. En particulier, $\underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ facteurs}}$ est encore noté $\mathbb{R}^n$. De même, on note E^n l'ensemble $\underbrace{E \times \ldots \times E}_{n \text{ facteurs}}$.

Exercice - Soit $A = B = \{1, 2\}$. Donner tous les sous-ensembles de $A \times B$.

TABLE DES MATIERES