Chapitre 3

S'exprimer en mathématiques

1. Les énoncés

Des énoncés mathématiques sont des phrases qui ont pour but de définir des objets mathématiques ou bien d'en donner des propriétés.
Voici des exemples d'énoncés

1) Le nombre 3 est un entier positif
2) Soit x un réel positif
3) Il existe un entier naturel plus grand que 2^{1000}
4) Posons $a = 2^{10} - 1$
5) Si n est un entier relatif, alors $n - 1$ est un entier positif
6) Si x est un réel, alors le plus grand des deux nombres x et $-x$ s'appelle la valeur absolue de x
7) Notons I l'intervalle $[1, 0]$
8) $2 \leq 5$
9) Le nombre 3 est négatif

Certains énoncés affirment une assertion : ce sont les énoncés (1), (3), (5) et (8). D'autres définissent et nomment un nouvel objet : (6) ; ce sont des définitions. Enfin, il y a des énoncés, comme (2), (4) et (7), qui indiquent que l'on va désigner par un certain symbole un objet déjà existant : ce sont des notations.
Une assertion est un énoncé mathématique qui est soit vrai, soit faux ; elle ne peut être les deux à la fois. Les assertions (1), (3) et (8) sont vraies, l'assertion (9) est fausse. En général, on les désigne par des lettres majuscules : P $1 > 2$ est une asertion vraie.
Une assertion peut dépendre d'une variable ; par exemple, l'assertion (5) dépend de n. C'est bien une assertion car on peut dire si elle est vraie ou fausse dès que l'on a donné une valeur à la variable : elle est vraie si $n = 3$, elle est fausse si $n = 0$. On la note $P(n)$.

Remarque - On appelle théorème, corollaire, proposition, lemme des assertions mathématiques vraies.
A partir de propositions P et Q données, on peut définir de nouvelles propositions dont on connait leur valeur de vérité si on connait les valeurs de vérité de P et Q.

2. Négation d'une proposition

Soit P une proposition. La négation de P est la proposition notée $(non\, P)$ qui est vraie lorsque P est fausse et fausse lorsque P est vraie.
Généralement, on remplace la proposition $(non\, P)$ par une proposition équivalente. Par exemple, la négation de $x \leq 2$ est $(non\,(x \leq 2))$ que l'on écrit plutôt $x > 2$.

3. L'opération *ou*

Considérons la proposition suivante : "3 est pair *ou* 2 est pair". Elle est du type $P\, ou\, Q$, où P est la proposition "3 est pair" et Q la proposition "2 est pair".
Par définition, une proposition de la forme $(P\, ou\, Q)$ est vraie si l'une au moins des propositions P ou Q est vraie. Elle est donc également vraie si P et Q sont vraies. Elle n'est fausse que si P et Q sont toutes les deux fausses.
Dans l'exemple précédent, la proposition Q est vraie, donc la proposition $(P\, ou\, Q)$ est vraie.

⚠ Le sens de "ou" n'est pas le même dans le langage courant lorsque l'on dit "fromage ou dessert". Les deux phrases, "nous ne sortirons pas s'il pleut ou s'il vente" et "préférez-vous habiter à la ville ou à la campagne" n'utilisent pas le même sens pour le "ou"

4. L'opération *et*

Considérons la proposition suivante : "3 est pair *et* 2 est pair". Elle est du type $(P\, et\, Q)$, où P est la proposition "3 est pair" et Q la proposition "2 est pair".
Par définition, une proposition de la forme $(P\, et\, Q)$ est vraie si les deux propositions P et Q sont vraies. Elle est fausse dès que l'une au moins des deux propositions P et Q est fausse. Elle n'est vraie que si P et Q sont vraies.
Dans l'exemple donné, la proposition P est fausse donc la proposition $(P\, et\, Q)$ est fausse.

⚠ Dans le langage courant, la conjonction "et " peut marquer des nuances de la pensée telles que la succession dans le temps, la conséquence, l'opposition...

Voulez-vous entrer et vous asseoir
Je suis tombé et je me suis fait mal
Le roseau plie et ne rompt pas

En mathématiques, il n'y a pas ces nuances. Les propositions "P *et* Q" et "Q *et* P" sont les mêmes.

5. L'implication

5.1. Définition

Soit P et Q deux propositions. La proposition "si P, alors Q" exprime que, si P est vraie, alors Q aussi. Ce type de propositions s'appelle des implications. Elle se dit aussi : "P implique Q" ou "pour que P soit vraie, il faut que Q soit vraie".

⚠ Dans le langage courant, on emploie souvent " il faut " à la place de " il suffit ". Par exemple, on dit " pour traverser la rivière, il faut prendre le bateau ", alors que c'est en fait suffisant, mais pas nécessaire. On peut le faire la nage.

Lorsque P et Q sont constituées de symboles mathématiques, elle se note également "$P \Longrightarrow Q$".
La proposition "$P \Longrightarrow Q$" est fausse si P est vraie et Q est fausse. Elle est vraie dans les trois autres cas.
Par exemple, la proposition $(2 < 1 \Longrightarrow 1 \leq 2)$ est vraie. Ou encore, la phrase "si un homme mesure plus de 10 m, il a trois jambes.

5.2. Table de vérité

Proposition - La proposition $(\mathbf{P} \Longrightarrow \mathbf{Q})$ a les mêmes valeurs de vérité que la proposition $((non\,\mathbf{P})\ ou\ \mathbf{Q})$.

$\mathbf{P}$	$\mathbf{Q}$	$(\mathbf{P}\Longrightarrow\mathbf{Q})$	$(non\,\mathbf{P})$	$((non\,\mathbf{P})\ ou\ \mathbf{Q})$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

5.3. L'implication n'est pas un synonyme de "donc"

Dans le langage courant, le mot "implique" signifie que ce qui est à gauche a pour conséquence ce qui est à droite. Le connecteur $\Longrightarrow$ se lit bien "implique", mais ne doit pas être compris dans ce sens. En effet "$P \Longrightarrow Q$" ne signifie pas que Q est une conséquence de P. Il n'y a pas de relation de cause à effet : une assertion Q vraie est impliquée par toute autre assertion, vraie ou fausse.

Exercice - (Non associativité de $\Longrightarrow$) Soit $P:\ 0=1$, $Q:\ 0=0$ et $R:\ 0=1$ trois assertions, les assertions "$(P \Longrightarrow Q) \Longrightarrow R$" et "$P \Longrightarrow (Q \Longrightarrow R)'$" ont-elles la même valeur de vérité ?

D'après l'exercice précédent, il faut remarquer que l'écriture d'implications à la chaîne $P \Longrightarrow Q \Longrightarrow R \Longrightarrow S \Longrightarrow \ldots$ n' a AUCUN sens. Ce que l'on veut généralement dire lorsque l'on est tenté d'écrire ce genre de choses est que le résultat s'obtient à partir d'une suite logique de déductions (qui en fait utilise la transitivité de l'implication). Cela s'exprime mieux en français avec les mots "donc", "d'où"...

6. L'équivalence

La proposition $\big((P \Longrightarrow Q)\, et\, (Q \Longrightarrow P)\big)$ se note $(P \Longleftrightarrow Q)$. Elle est vraie si P et Q sont toutes les deux vraies ou si P et Q sont toutes les deux fausses. On dit alors que les propositions P et Q sont équivalentes ou bien que P est vraie si et seulement si Q est vraie.

7. Négation d'une proposition

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
non(non\, P) &\Longleftrightarrow P \\
non(P\, ou\, Q) &\Longleftrightarrow (\big((non\, P)\, et\, (non\, Q)\big) \\
non(P\, et\, Q) &\Longleftrightarrow (\big((non\, P)\, ou\, (non\, Q)\big) \\
non(P \Longrightarrow Q) &\Longleftrightarrow (\big((P)\, et\, (non\, Q)\big)
\end{aligned}$$

8. Propositions avec des quantificateurs

Nous avons vu qu'une proposition peut dépendre d'une variable ; dans ce cas, elle est vraie ou fausse selon les valeurs que prend cette variable. Par exemple, si x est un nombre réel, la proposition "$x^2 - 3x + 2 < 0$" n'est pas vraie pour toutes les valeurs de x. Elle ne l'est que lorsque le réel x appartient à l'intervalle $]1, 2[$. Il est en général intéressant de savoir à quel ensemble doit appartenir x pour que la proposition soit vraie ou même s'il existe des x pour lesquels la proposition soit vraie. Pour cela, on utilise les terminologies "pour tout" ou "quel que soit" et "il existe".

8.1. Le quantificateur universel

Pour exprimer que l'on a $x^2 - 3x + 2 < 0$ à chaque fois que x est un élément de l'intervalle $]1, 2[$, on dit "pour tout nombre réel x appartenant à $]1, 2[$, on a $x^2 - 3x + 2 < 0$" ou bien "quel que soit le nombre réel x appartenant à $]1, 2[$, on a $x^2 - 3x + 2 < 0$". On écrit alors

$$\forall x \in]1, 2[, \quad x^2 - 3x + 2 < 0$$

Plus généralement, soit P une proposition qui dépend d'un objet appartenant à un certain ensemble E. La nouvelle proposition $(\forall x \in E, P)$ est vraie si et seulement si P est vraie pour toutes les valeurs que x peut prendre dans E. Pour que la proposition $(\forall x \in E, P)$ soit fausse, il suffit de trouver un élément x appartenant à E pour lequel la proposition P soit fausse.

8.2. Le quantificateur existenciel

Il n'est pas toujours facile de déterminer un ensemble d'éléments qui vérifient une certaine proposition P. Par contre, on aimerait savoir s'il existe au moins un élément qui la vérifie. Soit P une proposition qui dépend d'un objet appartenant à un certain ensemble E. La nouvelle proposition $(\exists x \in E, P)$ est vraie si et seulement si on oeut trouver au moins une valeur x de E qui vérifie P. La proposition $(\exists x \in E, P)$ est fausse, si et seulement si elle est fausse pour toutes les valeurs que peut prendre x dans E.

8.3. Négation des quantificateurs

On a les équivalences suivantes :

$$non(\forall x \in E\, P) \iff \big(\exists x \in E,\, (non\, P)\big)$$
$$non(\exists x \in E\, P) \iff \big(\forall x \in E,\, (non\, P)\big)$$

TABLE DES MATIERES