Chapitre 5

Applications

1. Définitions et exemples

Définition 5.1 – Soient E et F deux ensembles. Une application f de E dans F est un "procédé" qui permet d'associer à chaque élément x de E un unique élément y de F ; cet élément y est alors noté $y = f(x)$, on l'appelle **l'**image de x et on dit que x est **un** antécédent de y par f. On dit que E est l'ensemble de départ de f et que F est l'ensemble d'arrivée de f.

On note $f : E \longrightarrow F$ ou $f : \begin{array}{c} E \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$.

L'ensemble $G = \{(x, y) \in E \times F \,|\, y = f(x)\}$ est appelé le graphe de f.

Exemples - • On définit une application f en prenant : $E = \{1, 2, 3\}$, $F = \{1, 2, 3, 4\}$, $f(1) = f(2) = 1$, $f(3) = 4$. Alors, l'image de 3 est 4 et 1 a deux antécédents : 1 et 2.

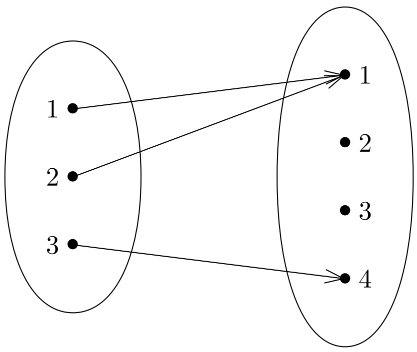


Diagramme sagittal

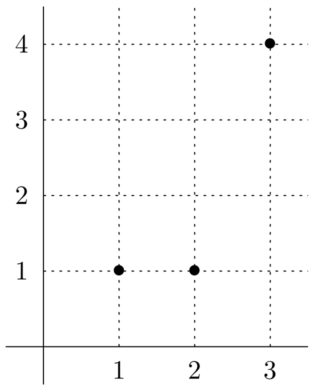


Diagramme cartésien

• L'application Logarithme : $\ln : \begin{array}{c} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \ln(x) \end{array}$

• L'application : $\begin{array}{c} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longmapsto (2x + 3y, x - y + z, y + 5z) \end{array}$

• L'application appelée "première projection" ou "première coordonnée" :
$p_1 : \begin{array}{c} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto x \end{array}$

• L'application "identité" : $Id_E : \begin{array}{c} E \longrightarrow E \\ x \longmapsto x \end{array}$

Contre-exemples - Les énoncés suivants sont faux ou incomplets :

- *"L'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui associe à chaque z de $\mathbb{C}$ une de ses racines carrées complexes".*
- *"L'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1/x$".*
- *"L'application f définie sur $\mathbb{Z}$ par $f(x) = x^2$"*

Remarques - • On note souvent $\mathcal{F}(E,F)$ l'ensemble des applications de E dans F.
• On parle plus généralement de fonctions : une fonction f d'un ensemble E dans un ensemble F associe à chaque élément x de E un élément de F *au plus*; l'ensemble des éléments x de E auxquels elle associe un élément y de F est appelé le domaine de définition de la fonction f et noté D_f. Si x appartient à D_f, l'élément y qui lui est associé est noté $y = f(x)$. On peut alors construire l'application (encore notée f par abus de langage), $f : \begin{array}{c} D_f \longrightarrow F \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$ et c'est elle qu'on étudie en fait. Par exemple, si on parle de "la fonction réelle de la variable réelle définie par $f(x) = 1/x$", on a $D_f = \mathbb{R}^*$, et on étudie l'application $f : \begin{array}{c} \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 1/x \end{array}$.

2. Egalité - Restriction - Prolongement

Définition 5.2 – Soient $f : E \longrightarrow F$ et $f_1 : E' \longrightarrow F'$ deux applications. On dit qu'elles sont égales et on note $f = f_1$ si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

$$E = E',\ F = F' \text{ et } \forall x \in E,\ f(x) = f_1(x).$$

Exemples - • Soient $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \cos(x) \end{cases}$ et $f_1 : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2\cos^2(x/2) - 1 \end{cases}$ Alors, on a $f = f_1$.
• Les trois applications $f : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$, $g : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$ et $h : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{cases}$, sont deux à deux distinctes.

Définition 5.3 – Soient E et F deux ensembles, E_1 un sous-ensemble de E, $f : E \longrightarrow F$ et $f_1 : E_1 \longrightarrow F$. On suppose que pour tout élément x de E_1, on a $f(x) = f_1(x)$. Alors, on dit que f_1 est **la** restriction de f à E_1 et que f est **un** prolongement de f_1 à E. On note $f_1 = f|_{E_1}$.

Exemple - Dans le deuxième exemple ci-dessus, h est la restriction de f à $\mathbb{R}_+$, et f est un prolongement de h à $\mathbb{R}$. Mais l'application $k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que ($\forall x \in \mathbb{R}_+$, $k(x) = x^2$ et $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$ $k(x) = 0$) est un autre prolongement de h. (Dessiner et comparer les graphes de ces trois applications).

Remarque - Lorsque f est une application de E dans F et F_1 un sous-ensemble de F tel que pour tout élément x de E l'élément $f(x)$ appartienne à F_1, on considère souvent l'application $g : \begin{array}{c} E \longrightarrow F_1 \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$. C'est le cas dans le deuxième exemple pour les applications f et g, si on prend $F_1 = \mathbb{R}_+$.

Exercice - Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application donnée par $f(x) = 1$ pour tout x tel que $0 \leq x \leq 1$, $f(x) = 2$ pour tout x tel que $x > 1$. Trouver deux prolongements distincts de f à $\mathbb{R}$. Quelle est la restriction de f à $[0,1]$? Trouver une application g de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) = f(x)$.

---

3. Composition des applications

Définition 5.4 – Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. On définit une application de E dans G notée $g \circ f$ en posant

$$\boxed{\forall x \in E,\ g \circ f(x) = g(f(x)).}$$

On l'appelle application composée de g et f.

Remarques - • Soient f et g deux éléments de $\mathcal{F}(E,E)$; les deux applications $f \circ g$ et $g \circ f$ sont définies, mais en général elles ne sont pas égales. Par exemple, si on a $f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^2 \end{array}$ et $g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2x \end{array}$, on obtient $g \circ f : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2x^2 \end{array}$ et $f \circ g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 4x^2 \end{array}$ et ces deux applications sont différentes (prouvez le).
• On a $(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$ (lorsque cela a un sens).
• Soient f et g deux applications $f : E \longrightarrow F$, $g : F_1 \longrightarrow G$ où F_1 est un sous-ensemble de F tel que pour tout $x \in E$, $f(x)$ appartienne à F_1 ; soit $f_1 : \begin{array}{l} E \longrightarrow F_1 \\ x \longmapsto f(x) \end{array}$. L'application $g \circ f_1$ est souvent encore notée $g \circ f$ par abus de langage.

Exercice - Soit $E = \{1,2,3\}$, $f : E \longrightarrow E$ *et* $g : E \longrightarrow E$ *les applications définies par* $f(1) = 1$, $f(2) = 3$, $f(3) = 2$, $g(1) = 2$, $g(2) = 1$, $g(3) = 3$. *Calculer* $f \circ f$, $f \circ g$ *et* $g \circ f$. *A-t-on* $f \circ g = g \circ f$ *?*

---

4. Bijection - Injection -Surjection

Proposition et définition 5.5 – Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.
1 – On dit que f est une surjection ou que f est surjective si chaque élément y de F est l'image d'un élément de E au moins, c'est-à-dire si pour chaque élément y de F, l'équation $y = f(x)$ a au moins une solution dans E, ce qui s'écrit :

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)$$

2 – On dit que f est une injection ou que f est injective si la proposition suivante est vraie :

$$\forall (x,x') \in E^2,\ (f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x').$$

c'est-à-dire si chaque élément y de F est l'image d'un élément de E au plus, ou encore, si pour chaque élément y de F, l'équation $y = f(x)$ a au plus une solution dans E.
3 – On dit que f est une bijection ou que f est bijective si elle est à la fois injective et surjective.

Preuve : on va démontrer l'équivalence concernant l'injectivité.

1) *Supposons que tout élément de* F *admette au plus un antécédent par* f. *Soient* x *et* x' *deux éléments de* E *tels que* $f(x) = f(x')$. *Posons* $y = f(x)$. *C'est un élément de* F *qui admet* x *et* x' *pour antécédents. Or* y *a au plus un antécédent. Donc* $x = x'$.
   On a montré que, si tout élément de F *a au plus un antécédent par* f, *l'application* f *est injective.*
2) *Supposons qu'il existe un élément de* F *qui n'admette pas au plus un antécédent par* f. *Notons* y *un de ces éléments.* y *a (au moins) deux antécédents distincts* x *et* x'. *Par définition d'un antécédent, on a* $f(x) = f(x') = y$. *On a donc* $x \neq x'$ *et* $f(x) = f(x')$.
   On a montré $\exists (x,x') \in E^2$, $(x \neq x'$ *et* $f(x) = f(x'))$, *c'est-à-dire la négation de* "$\forall (x,x') \in E^2,\ (f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x')$," *c'est-à-dire que* f *n'est pas injective. On a donc montré l'implication réciproque par contraposée.*

Remarques - • L'écriture avec les quantificateurs est souvent plus commode pour montrer qu'une application est injective.
• L'expression "au plus" signifie qu'un élément de F soit n'a pas d'antécédent, soit en a un.

Proposition 5.6 – Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. L'application f est bijective si chaque élément y de F est l'image d'un élément x de E et d'un seul, c'est-à-dire si pour chaque élément y de F, l'équation $y = f(x)$ a une solution x et une seule dans E, ce qui s'écrit :

$$\forall y \in F, \exists! x \in E, \ y = f(x)$$

Remarques - Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.
• Pour montrer que f n'est pas injective, il suffit de trouver deux éléments distincts x et x' de E tels que $f(x) = f(x')$.
• Pour montrer que f n'est pas surjective, il suffit de trouver un élément y de F qui n'a aucun antécédent.

Exemples -

- Soit v l'application de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $v(x) = x^2 - 3x$. Montrons que v est injective. Soient x et x' deux éléments de $[0, 1]$. Supposons $v(x) = v(x')$. On a donc $(x - x')(x + x' - 3) = 0$, d'où $x = x'$ ou $x + x' - 3 = 0$. Mais comme x et x' sont inférieurs à 1, on a $x + x' \leq 2$ et on ne peut avoir $x + x' = 3$. Donc, on a $x = x'$. On a montré $(\forall x, x' \in E, (v(x) = v(x') \Longrightarrow x = x'))$, donc v est injective. Mais v n'est pas surjective. En effet, si x appartient à $[0, 1]$, on a $x(x - 3) \leq 0$ donc $f(x) \leq 0$; si y est un réel strictement positif, l'équation $y = f(x)$ n'a aucune solution dans $[0, 1]$.
- Soit $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ l'application telle que $u(x) = 0$ si $x < -1$ et $u(x) = x + 1$ si $x \geq -1$. Les réels -1 et -2 sont distincts et ont la même image : $u(-1) = u(-2) = 0$. Donc u n'est pas injective. Montrons que u est surjective. Soit y un réel positif. On veut montrer qu'il existe au moins un élément x de $\mathbb{R}$ tel que $y = u(x)$. Posons $x = y - 1$. On a alors $x \geq -1$ et $y = x + 1$, donc $y = u(x)$. On a donc montré que pour tout $y \in \mathbb{R}^+$, il existe au moins un $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = u(x)$, c'est-à-dire que u est surjective.

5. Etude des bijections

Définition 5.7 – Soit $f : E \longrightarrow F$ une bijection. Alors, l'application de F dans E qui à chaque élément y de F associe l'unique élément x de E solution de l'équation $y = f(x)$ est appelée application réciproque de f et notée f^{-1}.

Remarque - Si f est bijective, $x \in E$ et $y \in F$, il est équivalent de dire "x est un antécédent de y pour f", "$y = f(x)$", "$x = f^{-1}(y)$" ou "y est un antécédent de x pour f^{-1}".

Exemples -

- Soit h l'application de $\{1, 2, 3\}$ dans $\{1, 5, 7\}$ telle que $h(1) = 5, h(2) = 1$ et $h(3) = 7$; elle est bijective. Sa réciproque h^{-1} est l'application de $\{1, 5, 7\}$ dans $\{1, 2, 3\}$ donnée par $h^{-1}(1) = 2$, $h^{-1}(5) = 1$, $h^{-1}(7) = 3$.
- Considérons la bijection $l : \begin{array}{c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^3 \end{array}$. L'application réciproque de l est $l^{-1} : \begin{array}{c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt[3]{x} \end{array}$
.

Exercice - Montrer que l'application $h : \begin{array}{c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 2x - 1 \end{array}$ *est bijective et déterminer* h^{-1}.

Proposition 5.8 – Soit $f : E \longrightarrow F$ une application bijective. Alors
1) f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$,
2) $f^{-1} \circ f = Id_E$ et $f \circ f^{-1} = Id_F$

Preuve : *1) Soit x un élément de E. On considère l'équation $x = f^{-1}(y)$ (dans laquelle l'inconnue est y et la donnée x). On veut montrer que cette équation a une solution dans F et une seule. Par définition de f^{-1}, cette équation équivaut à l'équation $y = f(x)$. Elle a donc une seule solution et c'est $f(x)$, d'où le résultat.*
2) Il faut montrer que $f^{-1} \circ f$ est une application de E dans E et que pour tout $x \in E$, $f^{-1} \circ f(x) = x$. Or on a $f : E \longrightarrow F$ et $f^{-1} : F \longrightarrow E$, donc $f^{-1} \circ f : E \longrightarrow E$. D'autre part, soit x appartenant à E, et posons $y = f(x)$; on a alors $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(y) = x$ par définition de f^{-1}. D'où $f^{-1} \circ f = Id_E$.
On fait de même pour montrer que $f \circ f^{-1} = Id_F$. □

La propriété 2 de la proposition précédente caractérise l'application réciproque f^{-1}. On a en effet la proposition suivante :

Proposition 5.9 – Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On suppose qu'il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = Id_E$ et $f \circ g = Id_F$. Alors, f et g sont bijectives, $g = f^{-1}$ et $f = g^{-1}$.

Preuve : *montrons que f est bijective. Soit y un élément de F. On veut montrer que l'équation $y = f(x)$ (où x est l'inconnue, y la donnée) a une et une seule solution dans E.*
Si x est solution, on a $g(y) = g \circ f(x)$ et comme $g \circ f = Id_E$, on a $x = g(y)$; inversement, si $x = g(y)$, x appartient à E et $f(x) = f \circ g(y)$; comme $f \circ g = Id_F$, on a $f(x) = y$, donc x est solution. Il y a une solution et une seule et c'est $g(y)$. De tout ceci, on déduit que f est bijective et $g = f^{-1}$. Le reste de la proposition est une conséquence de la proposition précédente. □

6. Image directe - Image réciproque

On fixe toujours une application $f : E \longrightarrow F$.

Définition 5.10 – Soit B un sous-ensemble de F. On appelle image réciproque de B par f l'ensemble des éléments x de E dont l'image $f(x)$ par f est dans B. C'est un sous-ensemble de E ; on le note $f^{-1}(B)$. On a donc pour tout élément x de E :

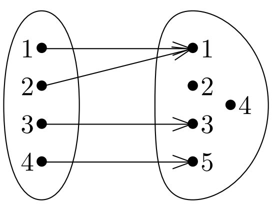
$$\boxed{x \in f^{-1}(B) \Longleftrightarrow f(x) \in B}$$

Définition 5.11 – Soit A un sous-ensemble de E. On appelle image directe de A par f l'ensemble des images $f(x)$ des éléments x de A. C'est un sous-ensemble de F ; on le note $f(A)$. On a donc pour tout élément y de F :

$$\boxed{y \in f(A) \Longleftrightarrow \exists x \in A,\, y = f(x).}$$

L'ensemble $f(E)$ est aussi appelé l'image de f.

Exemple - Considérons l'exemple de la figure ci-dessous



On a $f^{-1}(\{2\}) = \emptyset$,
$f^{-1}(\{1\}) = f^{-1}(\{1,2,4\}) = \{1,2\}$,
$f(\{1,4\}) = \{1,5\}$ et l'image de f est $f(\{1,2,3,4\}) = \{1,3,5\}$.

Exercice - 1°) Dans l'exemple de la figure précédente, calculer $f^{-1}(\{1,2,5\})$ et $f(\{2,3\})$.

2°) Soit $g : \begin{array}{c} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sin(x) \end{array}$. Calculer $g^{-1}(\{-1,1\})$, l'image de g et $g([0, 3\pi/2])$.

Remarques sur les notations - Il faut être très prudent avec la notation f^{-1}, qui n'est pas très heureuse.

⚠ Supposons que f soit bijective. Les deux applications f et f^{-1} sont alors définies et la notation $f^{-1}(B)$ désigne a priori deux ensembles distincts : l'image réciproque de B par f et l'image directe de B par f^{-1}. Mais si $x \in E$, dire que $f(x) \in B$ équivaut à dire qu'il existe $y \in B$ tel que $f^{-1}(y) = x$. Ces deux ensembles sont donc égaux et la notation est sans ambiguïté. Mais, lorsque l'on utilise la notation $f^{-1}(B)$, on ne suppose pas que l'application f^{-1} est définie : l'application f *n'est pas forcément bijective*.

⚠ L'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ est l'ensemble des antécédents de y par f. Lorsque f est bijective, cet ensemble a un et un seul élément $f^{-1}(y)$; et on a donc alors $f^{-1}(\{y\}) = \{f^{-1}(y)\}$ (comprenez vous la différence de notation entre les deux membres ?) Dans le cas général, c'est un *ensemble* qui peut avoir 0,1 ou plusieurs éléments (trouvez-en des exemples sur la figure précédente). L'usage est malheureusement de noter plus simplement $f^{-1}(y)$ au lieu de $f^{-1}(\{y\})$, ce qui n'aide pas les débutants... Astreignez-vous donc au moins au début, à mettre toutes les accolades nécessaires.

Proposition 5.12 – Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors, elle est surjective si et seulement si son image $f(E)$ est égale à l'ensemble d'arrivée F.

Théorème 5.13 – Soit $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et une application $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose f continue et strictement croissante. Alors :

1) f est injective.
2) L'image de f est l'ensemble $[f(a), f(b)]$.
3) L'application f définit (par restriction de l'ensemble d'arrivée) une application $g : \begin{array}{rcl} [a, b] & \longrightarrow & [f(a), f(b)] \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ et cette application g est bijective.

On a des théorèmes analogues pour f strictement décroissante ou pour un intervalle I quelconque.

⚠ Une application bijective de $[a, b]$ dans $[f(a), f(b)]$ est-elle forcément monotone ? Fabriquez un contre-exemple.

7. Ensembles finis

Définition 5.14 – Un ensemble E est fini s'il est vide ou bien s'il existe un entier positif n et une bijection de E sur l'ensemble des n premiers entiers positifs, noté $\{1, \ldots, n\}$. On appelle cet entier n le cardinal de E et on le note card E. Tout ensemble qui n'est pas fini est dit infini.

Définition 5.15 – On appelle ensemble dénombrable tout ensemble qui est en bijection avec $\mathbb{N}$.

Exemple : l'ensemble des entiers pairs est dénombrable. ($x \mapsto 2x$ de $\mathbb{N}$ dans $2\mathbb{N}$)

8. Un peu de dénombrement

8.1. Applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini

Proposition 5.16 – L'ensemble des applications d'un ensemble E de cardinal p dans un ensemble F de cardinal n est fini et a pour cardinal n^p.

Exercice - Trouver toutes les applications de $\{1, 2, 3\}$ dans $\{a, b\}$.

Preuve : *par récurrence sur p. c'est vrai si $p = 1$.*
Supposons la propriété vraie pour tout ensemble de cardinal $p - 1$ et prouvons la pour card $E = p$. Soit $x \in E$ et $E' = E \setminus \{x\}$. Une application de E dans F est

déterminée de manière unique par sa restriction à E' et par l'image de x. Il y a n images possibles pour x et n^{p-1} restrictions possibles de f à E' ; donc n^p choix pour f. □

Théorème 5.17 – Soient E et F deux ensembles finis ayant *le même nombre d'éléments* et une application $f : E \longrightarrow F$. Alors les affirmations suivantes sont équivalentes :

1) f est bijective 2) f est injective 3) f est surjective

⚠ Le résultat est-il vérifié pour les applications suivantes ? Pourquoi ?

1) $\begin{aligned} \{1,2\} &\longrightarrow \{1,4,6\} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$

2) $\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$

3) $\begin{aligned} \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\longmapsto n+1 \end{aligned}$

Exercice - Soient E et F deux ensembles finis ayant respectivement p et n éléments et f une application de E dans F.
1°) On suppose que f est injective ; comparer n et p. ($p \leq n$ car deux éléments ne peuvent pas avoir la même image ; il faut donc qu'il y ait au moins autant d'images que d'éléments dans E)
2°) Même question lorsque f est surjective. ($p \geq n$ car les néléments de F doivent avoir chacun un antécédent distinct des autres antécédents pour définir une application)
3°) Même question lorsque f est bijective ($p = n$ car surjective et injective).

Proposition 5.18 – Soit p et n deux entiers tels que $0 \leq p \leq n$. Pour tout ensemble E de cardinal p et pour tout ensemble f de cardinal n, le nombre des applications injectives de E dans F est l'entier $\dfrac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)\dots(n-p+1)$ noté A_n^p.

Exercice - Déterminer toutes les applications injectives de $\{1,2,3\}$ dans $\{a,b\}$.

Preuve : par récurrence sur p. Si $p = 1$, E a un seul élément. Une injection est déterminée par l'image de cet élément qui peut prendre toute caleur dans F. Donc n applications possibles et $A_n^1 = n$.
Soit E un ensemble à $p+1$ éléments et $x \in E$. On pose $E' = E \setminus \{x\}$. Une application f deE dans f est détemrinée par sa restriction à E' et par $f(x)$. Pour que f soit injective, il faut et il suffit que la restriction de f à E' soit injective et que $f(x)$ soit choisi dans le complémentaire dans F de l'ensemble à p éléments $f(E')$. Il y a donc $n-p$ valeurs possibles pour $f(x)$. Donc $A_n^{p+1} = (n-p)A_n^p$. D'où le résultat. □

Corollaire 5.19 – Le nombre des bijections d'un ensemble de cardinal n dans lui-même est $n!$.

Exercice - 1°) Quatre joueurs tirent chacun une carte d'un jeu de 32 cartes sans la remettre. Quel est le nombre de jeux de 4 cartes possibles obtenus ? $E = \{4 \text{ joueurs}\}$, $F = \{32 \text{ cartes}\}$. *Il y a injection car la carte n'est pas remise en jeu.* $A_{32}^4 = 863040$ *jeux possibles.*
2°) Quel est le nombre d'anagrammes du mot LAPIN ? $5!$

Proposition 5.20 – Le nombre de sous-ensembles à p éléments d'un ensemble à n éléments est C_n^p où $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Admis.

TABLE DES MATIERES