

RAPPELS DES RÈGLES CONCERNANT LES INÉGALITÉS

Pour tous les réels  $a, b, c$  et  $d$ ,

$R_1$  :  $a \leq b$  est équivalent à  $b - a \geq 0$ .

$R_2$  : si  $a \leq b$  et  $c \leq d$ , alors  $a + c \leq b + d$ .

$R_3$  : si  $c \geq 0$  et  $a \leq b$ , alors  $ca \leq cb$ .

$R_4$  : si  $c \leq 0$  et  $a \leq b$ , alors  $ca \geq cb$ .

$R_5$  : si  $0 \leq a \leq b$  et  $0 \leq c \leq d$ , alors  $0 \leq ac \leq bd$ .

$R_6$  : soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $a < b$  deux éléments de  $I$ .

Si  $f$  est croissante sur  $I$ , alors  $f(a) \leq f(b)$ .

Si  $f$  est décroissante sur  $I$ , alors  $f(a) \geq f(b)$ .

RÈGLES DE BASE SUR LES INÉGALITÉS

Lors de chaque manipulation d'inégalités, on demande de préciser la règle utilisée.

**Exercice n°1**

Montrer que, pour tout  $x \geq 1$ ,  $\frac{1-x}{\sqrt{x}+1} \geq \frac{1-x}{2}$ .

**Exercice n°2**

1) A quel intervalle appartient  $x^2$  si  $x \in ]-5, 1[$  ?

2) Quel est l'ensemble des solutions réelles de l'inéquation  $1/x < -2$  ?

**Exercice n°3**

Soient deux réels  $x$  et  $y$  tels que  $-2 \leq x \leq 3$  et  $-7 \leq y \leq -5$ . Encadrer les quantités suivantes :

1)  $x^2$       2)  $\frac{x^2}{y^2 - x^2}$

**Exercice n°4**

On considère le sous-ensemble  $A$  de  $\mathbb{R}$  défini par

$$A = \left\{ \frac{x-y}{x+y+3} ; x \in [-1, 1], y \in [-1, 1] \right\}.$$

Trouver un majorant et un minorant de  $A$ .

## VALEUR ABSOLUE ET INÉGALITÉS

### Exercice n°5

Montrer que, pour tous les réels  $x$  et  $y$ , on a  $2|xy| \leq x^2 + y^2$ .  
Peut-on avoir égalité ?

### Exercice n°6

On suppose que  $|x - 1| \leq 2$  et que  $-5 \leq y \leq -4$ . Encadrer les quantités suivantes :

$$1) x + y \quad 2) x - y \quad 3) xy \quad 4) \frac{x}{y} \quad 5) |x| - |y|.$$

### Exercice n°7

Soit  $x$  un réel tel que  $|x| \leq 1$ . Montrer que  $\left| \frac{x + \sin x}{x^7 + x - 3} \right| \leq 2$ .

### Exercice n°8

Pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on pose  $N_1(x, y) = |x| + |y|$ ,  $N_2(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$  et  $N_\infty(x, y) = \max(|x|, |y|)$  où le max de deux nombres représentent le plus grand de ces deux nombres. Montrer que, pour tous les réels  $x$  et  $y$ , on a  $N_\infty(x, y) \leq N_2(x, y) \leq N_1(x, y) \leq 2N_\infty(x, y)$ .

## FONCTIONS ET INÉGALITÉS

### Exercice n°9

Démontrer les inégalités suivantes et donner une interprétation géométrique.

- 1) Pour tout réel  $x$ ,  $e^x \geq 1 + x$
- 2) Pour tout réel  $x > 0$ ,  $\ln x \leq x - 1$
- 3) Pour tout réel  $x \in [0, \pi/2[$ ,  $\sin x \leq x \leq \tan x$

### Exercice n°10

Déterminer les domaines de définition des fonctions réelles suivantes :

- 1)  $f(x) = \frac{2 - \sqrt{2 - 3x}}{\sqrt{3x + 5} - 3}$
- 2)  $g(x) = \ln(x^2 - 4x + 3)\sqrt{4x - x^2}$

## RÉSOLUTION D'INÉQUATIONS

### Exercice n°11

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes

1)  $|x - 3| + |x + 4| \leq 7$

2)  $0 \leq \frac{x}{x^2 - 1} \leq 1$

3)  $\frac{x^3 - 1}{x + 1} \leq x^2 - x - 1$

4)  $\sqrt{x^2 - 4x + 4} \leq \left| \frac{3}{2}x - 1 \right|$

5)  $(4x^2 - 9) \ln(8 - x^2) \geq 0$

6)  $\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} \right| < \frac{1}{|x|} - \frac{1}{|x-1|}$

7)  $3|x - 2| - 2|x - 1| \geq |x - 4| - \frac{1}{4}(2x - 11)$

## APPROCHER UN NOMBRE

### Exercice n°12

Lequel des deux réels  $\frac{10^{20}}{1 + 10^{20}}$  et  $1 + 10^{-20}$  est le plus proche de 1 ?

### Exercice n°13

1) Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $g(x) = -2 \ln x - x e + 1$ .  
Démontrer que l'équation  $g(x) = 0$  a une solution unique,  $\alpha$ , sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ . Donner un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $10^{-3}$ .  
(Utiliser une calculatrice)

2) Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = \frac{\ln x + x e}{x^2}$ .

a) Etudier les variations de  $f$ .

b) Démontrer que  $f(\alpha) = \frac{1 + \alpha e}{2\alpha^2}$ .

c) Dédire, de l'encadrement de  $\alpha$ , un encadrement de  $f(\alpha)$  d'amplitude  $10^{-1}$ .

### Exercice n°14

Soit  $\alpha \in ]0, 1]$  et  $I_\alpha = ]-5 - \alpha, -5 + \alpha[$ .

Déterminer  $\alpha$  pour que, si  $x \in I_\alpha$ , alors  $\left| \frac{x+5}{x+3} \right| < 10^{-2}$ .

### Exercice n°15

Déterminer une valeur approchée à  $10^{-1}$  près de  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{8+x^3}$ .

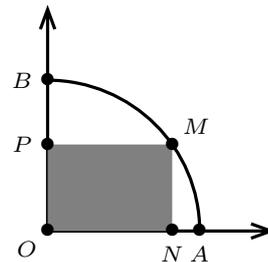
### Exercice n°16

Donner un encadrement de  $\int_1^2 \frac{e^x}{x^2} dx$ .

## UN PEU DE MODÉLISATION

### Exercice n°17

On considère un quart de cercle de centre  $O$ , de rayon 5 cm et d'extrémités  $A$  et  $B$ . Un point  $M$  est mobile sur cet arc.  $N$  et  $P$  sont les projetés orthogonaux respectifs du point  $M$  sur  $[OA]$  et  $[OB]$ . Etudier les variations de l'aire du rectangle  $ONMP$  suivant la position du point  $M$ , déterminer la position pour laquelle l'aire est maximale et calculer ce maximum.



### Exercice n°18

L'occupant d'une barque se pose le problème suivant : "Je suis en mer (point  $A$ ) à deux kilomètres en ligne droite de la plage (point  $B$ ).

Je désire atteindre le plus rapidement possible

ma maison (point  $C$ ) qui se trouve sur la plage à 6 kilomètres du point  $B$ .

En barque, j'avance à une vitesse de 3 km/h et à pied à une vitesse de 5 km/h.

En quel point  $M$  du rivage dois-je accoster ?"

