Les verbes expliquer, prouver, démontrer, sont souvent considérés comme synonymes dans la pratique de l'enseignement des mathématiques. On peut s'en assurer aisément par une consultation rapide des manuels scolaires. S'en tenir à ces habitudes risque de favoriser l'amalgame de différents niveaux d'activité des élèves. Choisir des mots différents, sans introduire de jargon inutile, peut constituer un bon instrument pour analyser et comprendre la complexité du problème de l'apprentissage de la démonstration. Nous proposons dans ce qui suit de préciser ce vocabulaire.
À la suite de Piaget, nous dirons qu'expliquer, « sur le terrain des sciences déductives », c'est d'abord dégager les « raisons » pour « répondre à la question du pourquoi ». Mais du point de vue même de la pratique des mathématiques, donner des raisons d'un théorème, l'expliquer et le démontrer relèvent de deux exigences distinctes. C'est le sens de la remarque suivante de Bourbaki : « tout mathématicien sait d'ailleurs qu'une démonstration n'est pas véritablement "comprise" tant qu'on s'est borné à vérifier pas à pas la correction des déductions qui y figurent, sans essayer de concevoir clairement les idées qui ont conduit à bâtir cette chaîne de déductions de préférence à tout autre ».
Expliquer renvoie aux significations, c'est-à-dire à la compréhension de la validité d'un énoncé, non au sens de la logique, mais au sens de ses relations avec le corps des connaissances mathématiques. Ces relations, leur signification profonde, peut échapper à une démonstration par ailleurs irréprochable du point de vue de la logique. En témoigne, par exemple, l'aveu célèbre de Cantor quand il interpelle Dedekind à propos de la démonstration qu'il vient d'écrire : « je le vois mais je ne le crois pas ».

1. EXPLICATION, PREUVE ET DEMONSTRATION

1.1. EXPLICATION

À la suite des linguistes, nous proposons de situer l'explication au niveau du sujet locuteur. C'est d'abord pour lui qu'elle établit et garantit la validité d'une proposition, elle prend racines dans ses connaissances et ce qui constitue sa rationalité, c'est-à-dire ses propres règles de décision du vrai. Mais elle est aussi ce discours qui vise à rendre intelligible à un autrui la vérité de la proposition déjà acquise pour le locuteur. Elle ne se réduit pas nécessairement à une chaîne déductive. Miéville la décrit ainsi au terme d'une étude sur « Explication et discours didactique de la mathématique » (1981) : « elle vise à établir chez l'interlocuteur un système d'objets qui ont entre eux une certaine homogénéité. Ces objets se rencontrent, s'agencent, et dans leur affinité, déterminent l'organisation d'une explication qui s'oriente vers la découverte d'un savoir nouveau… ».

1.2. PREUVE

Lorsqu'une explication est reconnue et acceptée, il convient pour la désigner de disposer d'un terme qui permette de marquer son détachement de celui qui l'a produite. En mathématique, il est clair que le terme « démonstration », du fait de son acception très spécifique, ne convient pas. Nous retiendrons plutôt celui de preuve.
Le passage de l'explication à la preuve fait référence à un processus social par lequel un discours assurant la validité d'une proposition change de statut en étant accepté par une communauté. Ce statut n'est pas définitif, il peut évoluer dans le temps avec l'évolution des savoirs sur lesquels il s'appuie. Par ailleurs une preuve peut être acceptée par une communauté mais être refusée par une autre. On en a un exemple, au siècle dernier, avec le « théorème des quatre couleurs » dont la preuve par Appel et Haken, qui n'est pas une démonstration au sens classique, est acceptée par certains mathématiciens mais est refusée par

d'autres qui lui reprochent de reposer sur des tests complexes réalisés à l'aide d'un ordinateur. Mais l'acceptation de l'« explication » de Appel et Haken ne repose pas sur de simples critères de vérification logique, elle invoque également le fait que les tests réalisés ont été vérifiés de façon indépendante en utilisant différents programmes sur différents ordinateurs.

1.3. DEMONSTRATION

Le type de preuve dominant en mathématiques a une forme particulière, il s'agit d'une suite d'énoncés organisée suivant des règles déterminées : un énoncé est connu comme étant vrai, ou bien est déduit à partir de ceux qui le précèdent à l'aide d'une règle de déduction prise dans un ensemble de règles bien défini. Nous appelons, suivant ici l'usage, « démonstrations » ces preuves. Ce qui caractérise les démonstrations comme genre de discours est leur forme strictement codifiée. En fait, cette rigueur formelle doit être nuancée au regard de la pratique. Par exemple, certaines étapes de la démonstration peuvent ne pas être explicitées mais laissées aux bons soins du lecteur. Si, en principe, être une démonstration relève, pour un discours, de critères logiques, dans les faits les processus sociaux au sein de la communauté mathématique jouent un rôle important (notamment au terme d'une procédure rigoureuse d'évaluation par les jurys des revues ou des congrès). Nous prenons, en parlant de communauté mathématique, un point de vue naïf ou, disons, du sens commun. Nous n'ignorons pas qu'au regard même de la démonstration cette communauté n'est pas monolithique. Des doctrines s'opposent (méthode axiomatique, intuitionisme, formalisme, etc.), mais ce qui divise les mathématiciens ce n'est pas tant la démonstration comme telle, que le choix des axiomes logiques et mathématiques.

1.4. RAISONNEMENT ET PROCESSUS DE VALIDATION

Le mot « raisonnement » a principalement deux acceptions que résume bien Blanché : « si le raisonnement, entendu comme acte de l'esprit, se rapproche de plus en plus de l'intuition à mesure que se concentre la pensée, inversement, quand celle-ci se détend dans son expression, verbale ou symbolique, il apparaît comme une certaine manière d'organiser le discours, pour devenir, à la limite, une suite d'opérations formelles exactement réglées, c'est-à-dire un calcul ». Pour ce qui nous intéresse ici, cette double acception présente une difficulté car elle introduit lorsque l'on parle du raisonnement d'un individu une ambiguïté évidente en ne distinguant pas assez clairement s'il s'agit de l'activité intellectuelle ou de l'explication produite. Aussi nous proposons de réserver le mot « raisonnement » pour désigner l'activité intellectuelle, en général non complètement explicite, de manipulation d'informations, données ou acquises, pour produire de nouvelles informations. Un processus de validation est cette activité lorsque sa finalité est de s'assurer de la validité d'un énoncé et éventuellement de produire une explication (respectivement une preuve ou une démonstration).