

2. DEMONSTRATION ET ARGUMENTATION

2.1. L'ARGUMENTATION, UNE PROBLEMATIQUE ISSUE DE L'ETUDE DES INTERACTIONS SOCIALES

L'interaction sociale entre les élèves est clairement apparue comme l'un des leviers puissants pour favoriser les processus de transfert aux élèves d'une responsabilité mathématique de leur activité et de leurs productions. Au point que l'interaction sociale a pu être considérée par certains comme étant la réponse par excellence aux problèmes posés. La rhétorique des tenants d'une telle position s'articulant essentiellement autour de l'idée que l'enseignant relégué au rôle de guide ou d'animateur des apprentissages ouvrirait la place, par ce seul mouvement de retraite, à une authentique construction des connaissances.

Les choses sont malheureusement moins simples qu'il n'y paraît. Des travaux de recherche, conduits notamment dans les années 80, ont confirmé le caractère productif et essentiel de l'interaction sociale, mais ils ont aussi et peut être surtout révélé que par sa nature même ce type d'interaction suscitait des processus et des comportements sociaux allant à l'encontre de la construction d'une problématique mathématique, et plus généralement scientifique, de la preuve par les élèves. Ces processus et comportements pouvaient être rassemblés au sein d'une même thématique de référence, celle de l'argumentation. On a pu même suggérer la conjecture didactique selon laquelle pour les élèves une problématique de l'argumentation viendrait s'opposer à une problématique mathématique de la preuve. À l'origine de cette idée on trouve une conception de l'argumentation qui fut bien exprimée par Perelman :

« Tandis que la démonstration, sous sa forme la plus parfaite, est une enfilade de structures et de formes dont le déroulement ne saurait être récusé, l'argumentation a un caractère non contraignant. Elle laisse à l'auteur l'hésitation, le doute, la liberté de choix ; même quand elle propose des solutions rationnelles, aucune ne l'emporte à coup sûr » (Perelman 1970 p.41).
Même sans aller jusqu'à une conception de la démonstration sous sa forme la plus parfaite, ce que nous ferons en nous plaçant du point de vue de la pratique des mathématiciens, il reste une opposition fondamentale sur le terrain de la contribution de ces deux genres de discours à une problématique de la validation. Cette opposition, comme cela est le plus souvent oublié, affecte aussi bien la question de la preuve que celle de la réfutation. Ainsi le traitement ad hoc des contre-exemples par les élèves, dont rendent compte diverses recherches expérimentales, suggère que les contre-exemples sont vus comme des objections plus que comme des réfutations, indices d'une contradiction.

2.2. L'ARGUMENTATION, UNE PROBLEMATIQUE ISSUE DE L'ETUDE DES PRODUCTIONS VERBALES

Les rapports entre argumentation et démonstration sont un objet d'étude ancien dans une perspective cognitive et linguistique. Il s'agit alors d'explorer la complexité cognitive de chaque genre, le rapport à la connaissance qu'il implique ou favorise, appuyant l'étude sur l'analyse du texte et des usages de la langue. Pour situer la problématique de telles approches, en reprenant une formulation de Jean-Blaise Grize, on peut souligner que : argumenter est sans doute une activité finalisée, mais c'est une activité discursive (le discours étant quoiqu'il en soit compris comme une activité sociale).

Argumentation et démonstration se trouveraient moins distingués par le genre des textes correspondants – Raymond Duval soulignera que la distance entre eux est faible – que par le statut et le fonctionnement des énoncés, et donc finalement celui de la connaissance mise en jeu. L'argumentation, parce que son fonctionnement semble émerger naturellement des pratiques communes de discours ne permettrait pas l'identification de la modification du statut

et du fonctionnement de la connaissance que requiert le travail mathématique, et en retour la modification de fonctionnement du discours lui-même.

L'examen des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans cette approche centrée sur l'analyse du discours paraît conforter la conjecture d'une relation conflictuelle entre les deux genres lorsque l'on se place dans une perspective d'apprentissage des mathématiques.

Raymond Duval en conclura que « le développement de l'argumentation même dans ses formes les plus élaborées n'ouvre pas la voie vers la démonstration. Un apprentissage spécifique et indépendant est nécessaire en ce qui concerne le raisonnement déductif ». Il en conclut que la démonstration relève d'un apprentissage « spécifique et indépendant ».

Pourtant, l'étude sur le terrain des interactions dans la classe, telle que la conduit par exemple Paul Cobb et son équipe, suggère la possibilité d'une argumentation mathématique à laquelle les élèves accéderaient par la pratique de discussions réglées par des normes qui émergeraient des interactions entre l'enseignant et les élèves (l'enseignant étant regardé comme un représentant de la communauté mathématique). Dans cette approche, construction d'une rationalité mathématique et argumentation sont étroitement liées.

2.3. DIFFERENTES CONCEPTIONS THEORIQUES DE L'ARGUMENTATION

La diversité que nous pouvons percevoir des problématiques de l'argumentation et de ses rapports aux mathématiques, notamment à la démonstration, est fondamentalement due à des différences profondes entre les recherches théoriques dans ce domaine. Sans s'engager ici dans une analyse des diverses problématiques de l'argumentation, mais en nous appuyant sur la synthèse proposée par Christian Plantin dans ses « Essais sur l'argumentation » (1990, Éditions Kimé), nous essayerons de donner une idée de l'importance d'une prise en compte de cette diversité. Trois auteurs, par le contraste de leurs problématiques, peuvent être retenus pour constituer un système de repères par rapports auxquels on pourra situer les travaux sur l'argumentation : Chaïm Perelman, Stephen Toulmin et Oswald Ducrot.

– Pour Perelman l'argumentation est moins caractérisée par la prise en charge de son objet que par celle de son auditoire, elle est moins finalisée par l'établissement de la validité d'un énoncé que par la capacité à obtenir l'adhésion de cet auditoire. En reprenant la formulation de Plantin, un énoncé dans cette conception a une valeur de raison, voire de vérité, dès lors qu'un individu l'accepte.

– Pour Toulmin, en revanche, la validité d'un énoncé est d'abord liée à celle de la structure du discours (sa rationalité) qui la défend et donc fait fondamentalement dépendre cette validité de celle des prémisses au sein d'une communauté (d'un domaine) de référence dès lors que cette communauté s'accorderait sur les règles. Indépendamment des domaines, le discours argumentatif est organisé sur un mode ternaire permettant le passage de données à une conclusion sous le contrôle le plus souvent implicite d'un « permis d'inférer » (ce schéma peut être augmenté d'indicateurs de force ou de restriction permettant de prendre en compte une incertitude possible sur l'inférence).

– Pour Ducrot l'argumentation est au cœur de l'activité de parole. Comme le souligne Plantin, on ne peut pas, dans cette problématique, « ne pas argumenter ». La structure de la suite des arguments joue un rôle déterminant : la force d'un argument ne viendra ni de caractéristiques « naturelles » ni de caractéristiques rationnelles, mais de sa place dans l'énoncé. C'est par la structure que l'on montre une orientation qui permet de recevoir « R comme une suite possible de P ». L'analyse des mots de liaison (connecteurs) prend avec Ducrot une importance particulière parce que ce sont eux qui mettent les informations contenues dans un texte au service de son intention argumentative. La polyphonie des connecteurs, enfin, permet de mettre en scène dans le discours non seulement le locuteur mais aussi son protagoniste potentiel ; « P mais Q » suggère un interlocuteur adhérant à P auquel on objecte Q.

La référence à l'une ou l'autre de ces conceptions de l'argumentation est susceptible de nous faire adopter une position différente quant à ce que peut représenter l'argumentation dans la pratique des mathématiques, notamment avec une visée d'enseignement et en relation avec la démonstration. En se plaçant dans la suite de Toulmin il paraît possible d'envisager une certaine continuité de l'argumentation à la démonstration, et pourquoi pas de considérer la démonstration comme un genre argumentatif particulier. En revanche l'existence d'une telle continuité paraît douteuse lorsqu'on se place dans le cadre proposé par Perelman ou Ducrot.

2.4. LES RISQUES DE LA RECONNAISSANCE D'UNE « ARGUMENTATION MATHÉMATIQUE »

Il y a dans l'argumentation un double mouvement de persuasion et de validation qu'il est important de remarquer. L'argumentation cherche à la fois à emporter l'adhésion d'un auditoire et à mettre en scène la validité d'un énoncé. Mais les sources de la compétence argumentative sont dans la langue naturelle et dans des pratiques dont les règles sont le plus souvent d'une nature profondément différente de celles que requièrent les mathématiques. On pourrait demander à l'argumentation de satisfaire les conditions d'une entrée dans une problématique de connaissance qui implique la décontextualisation du discours, l'effacement de l'acteur et de la durée, mais ces conditions – si on écoute bien ce que les théoriciens nous disent – vont finalement à l'encontre de sa nature profonde.

Ainsi, il n'y aurait pas d'argumentation mathématique au sens souvent suggéré d'une pratique argumentative en mathématiques qui se caractériserait par le fait qu'elle échapperait à certaines des contraintes qui pèsent sur la démonstration. Ceci ne signifie pas que tout discours en mathématique qui vise à établir la validité d'un énoncé ait toujours eu et puisse toujours avoir les caractéristiques d'une démonstration. La distinction entre preuve et démonstration au contraire montre que l'on peut imposer au discours les exigences liées à sa participation à la construction d'une œuvre de connaissance, sans pour autant le soumettre aux exigences de forme de la démonstration.

S'il n'y a pas d'argumentation mathématique, il existe pourtant une argumentation en mathématiques. La résolution de problèmes est le lieu où peuvent se développer des pratiques argumentatives reprenant des moyens opérationnels ailleurs (métaphore, analogie, abduction, induction, etc.) qui s'effaceront lors de la construction du discours qui seul sera acceptable au regard des règles propres aux mathématiques. En une formule, nous pourrions dire que l'argumentation est à la conjecture ce que la démonstration est au théorème.

2.5. L'ARGUMENTATION, OBSTACLE EPISTEMOLOGIQUE A L'APPRENTISSAGE DE LA DEMONSTRATION

En conclusion, la relation entre argumentation et démonstration est complexe et probablement fait partie du sens de chacune ; l'argumentation se constitue en un obstacle épistémologique à l'apprentissage de la démonstration, et plus généralement de la preuve en mathématique. Comprendre la démonstration c'est d'abord construire un rapport particulier à la connaissance en tant qu'enjeu d'une construction théorique, et donc c'est renoncer à la liberté que l'on pouvait se donner, en tant que personne, dans le jeu d'une argumentation. Parce que ce mouvement vers la rationalité mathématique ne peut être accompli qu'en prenant effectivement conscience de la nature de la validation dans cette discipline, il provoquera la double construction de l'argumentation et de la démonstration. L'argumentation dans la pratique commune est spontanée, comme le soulignent ceux qui travaillent le discours. Forcée dans les échanges familiaux, dans la cour de l'école, dans des circonstances multiples et souvent anodines, la compétence argumentative de l'élève est à l'image des pratiques familières : elle va de soi. La classe de mathématiques est l'un des lieux où l'existence de cette pratique peut être révélée parce que soudain elle apparaît inadéquate (mais les situations pour

susciter cette prise de conscience sont difficiles à construire). Ce serait même probablement une erreur de caractère épistémologique que de laisser croire aux élèves, par quelque effet Jourdain, qu'ils seraient capables de production de preuve mathématique quand ils n'auraient qu'argumenté.

Enfin un point fort qui sépare l'argumentation et la démonstration est la nécessité pour cette dernière d'exister relativement à une « axiomatique » explicite. Le mot « axiomatique » désigne simplement ici un ensemble de résultats considérés comme acquis au moment de la production de la démonstration (et non une construction destinée à clarifier les fondements du domaine mathématique concerné). Peut-être parce que le temps des mathématiques modernes a laissé de trop mauvais souvenirs, l'idée de lier démonstration et « axiomatique » paraît souvent susciter l'inquiétude sinon l'opposition, et pourtant, si l'on ne veut pas réduire la démonstration à une rhétorique particulière ou les mathématiques à un jeu de langage, il est nécessaire d'explicitier clairement les résultats admis sur lesquels la démonstration s'appuie.