DES ACTIVITES POUR L'ENSEIGNEMENT DE LA DEMONSTRATION

Il y a peu d'années encore, deux points de vue s'opposaient sur l'enseignement de la démonstration.
Les uns estimaient que l'important était de la pratiquer et surtout de lui donner du sens et donc que les activités ne poursuivant pas ces buts étaient inutiles. C'est dans cet esprit que, pendant longtemps, le seul type d'activités proposées aux élèves était un bon problème, éventuellement divisé en sous-problèmes, avec des questions contenant l'expression « démontrer que ». Les points d'appui de l'apprentissage étaient les corrections apportées aux copies des élèves et la lecture de démonstrations proposées par l'enseignant. Cependant l'expérience montre que beaucoup d'élèves ne découvrent pas par simple *imprégnation* les structures d'un texte de démonstration. Et cette démarche est implicitement ou explicitement contestée par la plupart des articles récents.
Les autres, sans doute plus près des échecs rencontrés, proposaient au contraire des activités adaptées aux obstacles qu'ils avaient observés. Comme toujours, certaines idées d'activités se sont avérées peu efficaces. Mais, d'une part, ceux qui proposent de telles activités spécifiques ont été de plus en plus attentifs à choisir des situations qui donnent vraiment du sens à la démonstration, d'autre part, les réflexions sur la nature particulière des textes de démonstrations conduisent à une meilleure analyse des difficultés liées à l'écriture et, partant, à la conception d'activités mieux comprises par tous. Ce sont ces activités qui font l'objet de ce paragraphe. Nous souhaitons permettre à chaque enseignant, pour son projet particulier, de trouver ici des références sur l'ensemble des ressources en termes d'activités.

1. CHOISIR UNE ACTIVITE

Au moment de choisir une activité, l'enseignant se demande toujours si elle jouera le rôle d'apprentissage qu'il en attend. Il peut arriver en effet que la tâche proposée ne provoque aucune activité véritable des élèves ou que l'activité déclenchée ne soit pas orientée vers l'objectif qu'il souhaitait atteindre. La manière dont se déroule une activité en classe dépend en réalité de beaucoup de détails qui peuvent paraître à première vue insignifiants. Il est donc important, avant d'expérimenter une activité dans sa classe de lire avec soin tous les éléments contenus dans la publication où elle est décrite.

De nombreux articles essaient de préciser les éléments qui *favorisent l'efficacité* d'une activité. Il n'est pas question ici de reprendre l'ensemble de ce vaste sujet[1]. Rappelons simplement quelques points importants.

1.1. SURMONTER UN OBSTACLE

Pour qu'une activité provoque un apprentissage, il faut qu'elle soit l'occasion pour l'élève d'une *véritable* activité cognitive. Il n'est pas rare, en effet de voir un élève aborder les tâches proposées avec un minimum de réflexion. Par exemple, il se contente d'une simple analogie avec un problème déjà rencontré, ou il utilise des indices non pertinents pour trouver une réponse et ne se donne aucun moyen pour en vérifier la validité, ou encore il se replie sur des tâches matérielles : réalisation de tableaux, recopie des données...
Le cas le plus favorable est celui où l'élève a l'impression d'avoir rencontré un véritable obstacle et de l'avoir surmonté. Le fait que tous les élèves réussissent ou ont un certain plaisir à réaliser une tâche n'est donc pas un indice obligatoirement favorable ; et ce n'est pas un indice défavorable de voir les élèves peiner, à condition qu'à l'issue de la séance des résultats significatifs soient obtenus par tous.
Cette réflexion a des conséquences importantes ; d'abord on ne favorise pas la réflexion de l'élève en décomposant une tâche intéressante en microtâches, un problème en beaucoup de sous-questions. Ensuite la meilleure façon d'aider les élèves en difficulté n'est pas de leur proposer des choses faciles ; il faut au contraire les obliger à aborder des problèmes qui leur paraissent difficiles. Mais il faut qu'ils arrivent à en venir à bout et pour cela des aides sont le plus souvent nécessaires. La conception de ces aides est l'une des difficultés majeures de la mise au point d'une activité, car il ne faut pas qu'elles dénaturent celle-ci. L'une des idées importantes est d'aider l'élève à se faire une bonne représentation de la situation, plutôt que de lui suggérer des procédures.
L'un des moyens d'augmenter les chances de voir chaque élève tirer profit d'une activité est de choisir des situations où plusieurs procédures différentes et des procédures accessibles à divers niveaux de complexité permettent d'avancer vers le résultat.

1.2. UNE TACHE CLAIRE

Il est très important que l'élève ne fasse pas de contresens sur ce qu'on lui demande de faire. C'est pourquoi la rédaction de la question doit être particulièrement travaillée ; elle va d'ailleurs dépendre de la culture de la classe. Seule l'expérimentation permet de savoir si la formulation choisie va être comprise comme on le souhaite par presque tous les élèves. En ce qui concerne la démonstration, par exemple, les mots « prouver », « démontrer », « expliquer » sont équivalents aux yeux de certains enseignants, alors que les élèves de Quatrième cherchent souvent à comprendre en quoi les tâches demandées sont différentes.

1.3. LE ROLE DU DEBAT

Plus encore que pour d'autres apprentissages, le débat, où les élèves confrontent leurs points de vue, joue un rôle important dans beaucoup d'activités concernant l'écriture de textes. L'expérience montre en effet que l'enseignant est désarmé pour convaincre des élèves que leur texte est inacceptable ou qu'ils ont tort de penser que deux phrases veulent dire la même chose. Il faut en effet un travail approfondi des élèves sur des textes pour leur faire changer de point de vue. La confrontation entre des élèves ayant des avis différents est l'une des manières de déclencher ce travail. Pour gérer cette confrontation, l'un des outils efficaces est

---

[1] Voir par exemple Jean Houdebine et Jean Julo, *Concevoir de "bonnes" fiches d'activités en mathématiques*, Repères IREM N°8, Topiques Éditions, 1992.

l'utilisation d'affiches : il s'agit de faire réaliser par les élèves en travail de groupe des affiches sur une question problématique, puis d'organiser une discussion la séance suivante autour de quelques affiches. Celles-ci sont choisies de manière à provoquer un débat fructueux entre les élèves.

1.4. DES LIGNES DIRECTRICES DANS LE CAS DE LA DEMONSTRATION

Dans le cas d'activités concernant l'apprentissage de la démonstration le choix est particulièrement difficile. Beaucoup de propositions semblent contradictoires : par exemple, certains estiment que la démonstration doit être abordée dans le cadre d'un problème suffisamment complexe, d'autres au contraire fondent leur stratégie sur un travail qui se réduit, pour les élèves, à écrire des démonstrations à un ou deux pas. Notre objectif ne peut être ici de défendre un point de vue, d'autant plus que dans l'état actuel des connaissances il est souvent difficile de trancher, car les expériences décrites ont des contextes différents. Nous avons donc pris le parti de retenir toutes les idées d'activités suffisamment argumentées. Mais il reste beaucoup à faire pour mieux connaître le rôle de chaque activité dans l'apprentissage de la démonstration. En effet, peu de ces activités sont décrites avec assez de détails et validées par un compte rendu d'expérimentation ; il est parfois difficile de savoir si les progrès constatés auprès des élèves sont dus à la nature de l'activité ou s'ils résultent d'un investissement important de l'enseignant qui l'a pratiquée ; plusieurs articles, enfin, ont pour objet de contester l'efficacité d'activités proposées dans des publications antérieures. Ces constatations ne sont pas spécifiques à la démonstration, car la difficulté de valider une activité est grande.
Cependant les publications sur le sujet font ressortir quelques idées importantes.
– La nécessité que l'activité donne *vraiment* du sens à la démonstration. Celle-ci ne doit pas devenir aux yeux des élèves un texte sans objet dont la forme est imposée par l'enseignant, mais plutôt un texte utile et efficace pour écrire la solution d'un problème en explicitant les raisons du résultat trouvé.
– Le rôle important de la production de textes dans l'apprentissage.
– La nécessité pour chaque enseignant de définir une stratégie cohérente d'apprentissage. Ce n'est que dans un tel cadre que le choix de telle ou telle activité peut prendre son sens.
– L'importance de proposer aux élèves des tâches variées pour atteindre les multiples objectifs qui apparaissent dans cet apprentissage.

2. LE PROBLEME DES OBJECTIFS

La complexité de l'apprentissage de la démonstration fait que chaque enseignant va avoir l'occasion de choisir, au cours de l'enseignement, de nombreux objectifs différents, en fonction de sa conception et des connaissances acquises par les élèves de sa classe. Pour atteindre chacun de ces objectifs il peut avoir à choisir une activité adaptée ; le même objectif peut conduire à des choix différents en fonction du vécu de la classe.
Dans les publications, les objectifs des activités destinées à l'apprentissage de la démonstration sont souvent exprimés de manière très générale : apprendre à démontrer, apprendre à raisonner. Il est très difficile dans ces conditions de s'assurer que l'objectif est atteint. On observe d'ailleurs très souvent des désaccords importants suivant l'interprétation de

chacun[2]. C'est pourquoi il nous paraît nécessaire d'énoncer ici des objectifs un peu plus précis, au risque de trahir ceux que les auteurs n'ont pas détaillés.
Voici quelques uns des objectifs possibles ; ils ne sont évidemment pas disjoints. Cette liste ne prétend ni être exhaustive, ni être organisée. Elle se propose simplement de servir de fil directeur dans la présentation des activités et d'aider les enseignants à choisir leurs objectifs successifs de manière pertinente, à chaque moment de l'apprentissage.

2.1. QUELQUES OBJECTIFS LIES A L'APPRENTISSAGE DE LA DEMONSTRATION

Initier à la preuve,
trouver un enchaînement déductif,
changer le statut des figures,
donner du sens à une phrase,
donner du sens à un théorème,
préparer à l'utilisation d'un théorème,
apprendre à écrire des mathématiques,
donner du sens à une démonstration,
préparer ou améliorer l'utilisation des mots de liaison,
faire émerger l'idée de statut des propositions,
mettre en évidence la structure des textes de démonstration,
faire apparaître l'originalité de la démonstration vis-à-vis d'autres textes,
maîtriser l'écriture d'une démonstration complexe.

2.2. DES OBJECTIFS DONT NOUS NE PARLERONS PAS

Bien sûr un élève ne peut écrire une démonstration que dans le cadre de la résolution de problème. Il est donc évidemment utile à l'apprentissage de la démonstration d'apprendre aux élèves à résoudre des problèmes. Cependant faire résoudre des problèmes même difficiles est souvent une tâche ayant peu de rapports directs avec l'apprentissage de la démonstration ; au moment de cet apprentissage, en effet, l'élève utilise d'autres moyens que la démonstration pour s'assurer de la validité de sa solution. Nous ne parlerons donc pas des activités dont l'objectif est d'aider les élèves à résoudre un problème (cf. la section : *Faire exister la phase heuristique*).
La maîtrise des connaissances mathématiques est aussi un prérequis. Mais beaucoup de ces connaissances n'ont pas de rôle spécifique dans l'apprentissage de la démonstration. Les activités dont l'objectif est l'apprentissage de ces connaissances ne seront pas non plus l'objet de ce chapitre.
Notons encore que raisonner sur des situations autres que mathématiques semble avoir peu d'impact sur la démonstration.

3. DEUX EXEMPLES

Avant de faire un panorama des activités proposées dans les publications, nous pensons utile de présenter un peu plus en détail deux activités. Elles nous semblent correspondre assez bien aux contraintes qui vont provoquer une *véritable* activité de l'élève (cf. le paragraphe *surmonter un obstacle* page 76). Elles illustrent la diversité des objectifs à atteindre et des

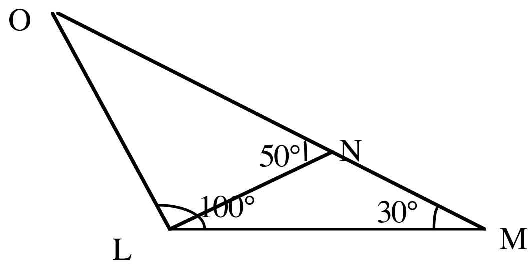
---

[2] Voir par exemple l'article de Michèle Muniglia, *La démonstration en géométrie en Cinquième*, Repères IREM N°7, 1992, page 69 : « pour eux il ne s'agissait que d'activités juxtaposées ne méritant en aucun cas l'intitulé démonstration ».

moyens qui peuvent être mis en oeuvre. La première se situe au début du collège, la seconde au lycée. L'une est une simple fiche bien adaptée à une seule séance, l'autre au contraire une longue séquence durant plusieurs séances. L'une a pour moteur une tâche de construction, l'autre est centrée sur un travail sur le texte. L'une est une activité préparatoire à l'écriture de démonstrations et laisse donc une grande liberté d'écriture aux élèves, l'autre est plus contraignante au niveau de l'écriture puisqu'il s'agit de démonstration.

3.1. UNE PREUVE POUR CONSTRUIRE

L'activité est proposée par Claude Frelet[3]. La fiche suivante est distribuée aux élèves. Ceux-ci, après 10 à 15 minutes de travail individuel, rédigent en groupes de 3 ou 4 élèves une affiche sur laquelle ils présentent leur construction et leur explication. Les affiches sont ramassées à la fin de la séance et servent de support à une discussion que l'enseignant engage la séance suivante.
Pour faire la construction, il est nécessaire de faire des déductions pour s'assurer par exemple que le triangle LON est isocèle ou pour calculer l'angle OLN ou l'angle NLM. Cette activité située en Cinquième ne demande pas aux élèves de produire une démonstration. Elle les invite à écrire une explication. L'écriture de ce texte sera facilitée par le fait que les élèves peuvent s'appuyer sur leur expérience d'écriture de programme de construction ; il leur suffit d'y ajouter librement quelques phrases qui évoquent les raisons de leur choix. Le travail de groupe favorise ici l'écriture d'un texte cohérent. A la séance suivante, le débat sur une ou plusieurs des affiches produites par les groupes d'élèves permet de rejeter les idées fausses en faisant intervenir d'autres arguments que l'autorité du professeur.

OLM est un triangle. Le point N appartient au segment [OM]. De plus, ONL = 50° ; OLM = 100° ; OML = 30° et LM = 15 cm. La figure ci-contre est mal construite ; elle ne correspond pas aux données. Construis une figure respectant cet énoncé. Explique ta méthode.	

L'expérience décrite dans l'article montre que la tâche est dans l'ensemble très bien comprise et qu'elle est ressentie comme une véritable difficulté à surmonter par la plupart des élèves. La diversité des procédures que l'on peut mettre en oeuvre permet à beaucoup d'élèves de s'y investir. Les productions des élèves sont de véritables textes contenant des argumentations mathématiques (cf. ci-dessous) ; on peut donc faire l'hypothèse qu'elle est une préparation utile en Cinquième pour pouvoir aborder la démonstration en Quatrième.

UN EXEMPLE DE TEXTE PROPOSE PAR UN ELEVE

Tracer un segment LM de 15 cm.

Tracer, à l'aide d'un rapporteur, un angle de 30° de sommet M.

Tracer un angle de 100° de sommet L.

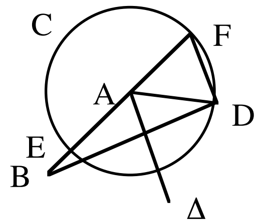
Les demi-droites M et L se coupent en un point nommé O.

[3] Claude Frelet, *Preuve pour écrire en Cinquième*, Repères IREM N°12, Topiques Éditions, 1993.

Calculer l'angle LNM : on sait que ONM = 180° et que ONL = 50°, donc LNM = 180 – 50 = 130°. Calculer l'angle NLM : on sait que LNM = 130° et que NML = 30°, donc NLM = 180 – (130 + 30) = 20°. Tracer un angle de 20° de sommet L à l'aide d'un rapporteur. Prolonger la demi-droite L jusqu'à ce qu'elle coupe le segment [OM]. On obtient le point N. Pour trouver l'angle LOM : on sait que LNO = 50° et que OLN = 100 – 20 = 80° donc LON = 180 – (80 +50) = 50°.

3.2. REDIGER EN LIBERTE

Il s'agit cette fois d'une séquence destinée à des élèves de Seconde[4]. Elle a pour objectif principal de faire redécouvrir aux élèves les libertés et les contraintes qui gouvernent les textes de démonstrations. Le travail se fait autour de l'énoncé ci-dessous.

ABD est un triangle tel que AB > AD. Le cercle C de centre A et de rayon AD coupe la droite (AB) en E et F. On mène par A la droite Δ parallèle à la droite (DF). Démontrer que Δ est la médiatrice du segment [ED].	

Dans un premier temps les élèves rédigent en travail de groupe une démonstration ; cette rédaction est l'objet d'un débat en classe entière. Il est intéressant de constater que les démonstrations rédigées en groupe en Seconde comportent peu de fautes et qu'un débat en classe entière permet une correction par les élèves de la plupart de ces fautes. Pour clore cette première partie on demande aux élèves de faire chez eux une rédaction individuelle de la démonstration, en fixant la contrainte d'utiliser les propriétés du triangle isocèle ADE afin que tous les élèves rédigent *la même démonstration*.
Dans un deuxième temps, plusieurs rédactions de cette démonstration, choisies par l'enseignant pour leur diversité, sont proposées aux élèves avec comme consigne d'indiquer les théorèmes qui sont utilisés dans chacune d'elles. C'est l'occasion pour les élèves de constater qu'il y a plusieurs manières d'énoncer le même théorème. Mais l'objectif de cette partie est surtout de leur faire découvrir qu'un théorème peut être *utilisé* dans une démonstration sans être explicitement énoncé. Cette découverte est très importante pour les élèves arrivant en Seconde. La plupart d'entre eux ont une idée assez claire de ce qu'est un pas de démonstration. En revanche beaucoup sont incapables de distinguer clairement les pas de démonstrations contenus dans un texte de démonstration un peu complexe, d'autant plus qu'ils ignorent que certains éléments d'un pas peuvent être sous-entendus.
Dans un troisième temps, la tâche consiste à exprimer par écrit les différences et les ressemblances entre deux des textes de démonstrations proposés. C'est l'occasion pour les élèves d'énoncer explicitement des libertés ou des contraintes. Les élèves ne sauront pas exprimer certaines d'entre elles et l'enseignant peut, à la fin de cette activité, en énoncer

---

[4] *La démonstration en Seconde*, IREM de Rennes, 1995.

quelques unes, comme par exemple : « il est possible de commencer une démonstration par la conclusion » ou « dans chacun des pas de démonstration, les données, le théorème et la conclusion du pas peuvent être mis dans n'importe quel ordre ; l'important est de mettre les mots de liaison adaptés ».
Un travail de ce type en début de Seconde permet à des élèves issus de collèges différents et qui, de ce fait, ont une culture différente de la démonstration de s'enrichir mutuellement et de se mettre d'accord. Cette activité sert alors de référence tout au long de l'année pour régler les conflits qui apparaissent dans la rédaction de démonstration : démonstration en désordre, proposition sous-entendue, indications heuristiques, mots de liaison inadaptés.

4. DES TACHES EN LIAISON AVEC DES OBJECTIFS

Étant donnée la grande diversité des activités, beaucoup de classifications sont possibles. Mais aucune n'est pleinement satisfaisante. Finalement nous avons choisi un classement centré sur les objectifs, bien que ceux-ci ne soient pas tous de même nature et ne soient pas disjoints. Mais il nous a semblé que ce classement était celui qui permettrait le mieux à un enseignant de choisir une activité bien adaptée à ses objectifs.

4.1. UNE DESCRIPTION SUCCINCTE

Notre objectif étant de faire un panorama des activités possibles, nous ne chercherons pas, dans ce chapitre, à donner de chacune une description détaillée. Cependant, pour mettre en oeuvre l'une d'elles, il est nécessaire d'avoir le maximum d'informations sur les conditions de mise en oeuvre, les productions des élèves et les raisons des choix des concepteurs de l'activité. Pour avoir ces informations, nous invitons le lecteur à se reporter aux articles où elle est décrite.
Nous regroupons les activités correspondant à des tâches voisines. Le mot tâche désigne ici le travail que l'élève doit réaliser, c'est-à-dire le but à atteindre, les procédures possibles pour y arriver, les contraintes et les aides qui lui sont proposées[5]. Pour chacune de ces tâches nous indiquons les grandes caractéristiques, puis nous les illustrons par quelques exemples brièvement décrits avec une référence commode, enfin nous formulons quelques remarques sur les difficultés rencontrées lors de leur mise en oeuvre ou des particularités importantes.
Certains types d'activités sont proposés dans de nombreux documents (par exemple, des activités autour des mots comme *si alors*, *parce que* dans une phrase) alors que d'autres types sont rares ou n'apparaissent que sous la forme de suggestions (par exemple, des activités permettant de résoudre le conflit fréquent opposant les élèves qui pensent que deux phrases veulent dire la même chose à ceux qui pensent le contraire).

4.2. LA TACHE TRADITIONNELLE : « DEMONTRER QUE »

Cette tâche trouve sa place naturelle auprès des élèves qui ont acquis suffisamment de connaissances sur le sujet. En d'autres termes, demander à un élève dans un problème de « démontrer que » est plutôt un exercice d'application sur des connaissances déjà acquises sur la démonstration qu'une activité pour l'apprentissage.

[5] On trouvera plus de détails dans Jean Houdebine et Jean Julo, *Concevoir de "bonnes" fiches d'activités en mathématiques*, Repères IREM N°8, 1992.

4.3. DES TACHES POUR INITIER A LA PREUVE

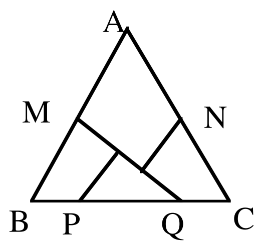
Dès le début du collège, certaines situations vont inciter les élèves à rechercher une *preuve* de ce qu'ils constatent[6]. Nous ne voulons pas ici parler a priori de démonstration. « Chercher une preuve » consiste pour l'élève à trouver des arguments de toute nature pour ou contre une conjecture. Cette conjecture peut soit être issue d'une proposition de l'enseignant, soit venir d'une question des élèves. Les preuves proposées par les élèves ne sont pas, a priori, des textes proches d'une démonstration. Notons que certaines *preuves* comme le tracé de figures seront acceptées en Cinquième alors qu'en fin de Quatrième, quand les élèves commencent à maîtriser la démonstration, elles seront refusées. Il n'y a pas là de contradiction ; il est légitime que les élèves débutants recherchent tous les types d'arguments pour se convaincre ; la prédominance de la démonstration à partir de la Quatrième se justifiera aux yeux des élèves parce que ce texte apporte non seulement une bonne certitude mais aussi un *certain type d'explication*.

a – Énoncer ou valider une conjecture

Exemple 1 : Dans un travail préliminaire on demande à des élèves de Cinquième de compléter par « sont toujours » ou « ne sont jamais » ou « sont parfois » la phrase suivante :

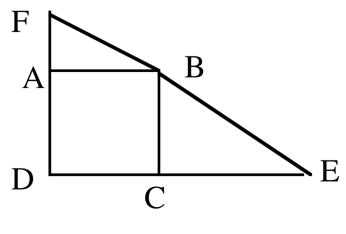
« les milieux des côtés d'un quadrilatère........ les sommets d'un parallélogramme »
Quelques quadrilatères bien choisis aident les élèves à corriger leurs nombreuses erreurs. En s'appuyant sur les doutes apparus, on peut inciter les élèves à valider leur conjecture. Ils réalisent alors de nombreux tracés et en particulier des quadrilatères non convexes[7].

Exemple 2 : Mireille Picard[8] propose aux élèves de Sixième de réaliser un puzzle avec quatre morceaux, la difficulté étant de trouver des preuves qu'il n'y a ni trou ni chevauchement. Mais l'article ne précise ni les modalités d'écriture, ni les résultats obtenus sur ce point auprès des élèves.



ABC est équilatéral, M et N sont les milieux de [AB] et de [AC], BP = QC = 1/4 BC.
En utilisant les quatre pièces, reconstituer une figure connue.

Exemple 3 : Jean-Pierre Muller[9] propose aux élèves de Quatrième une figure pour laquelle un problème d'alignement se pose.
ABCD est un carré de 8 cm de côté. AF = 5 cm, CE = 13 cm. F, B et E sont-ils alignés ?



---

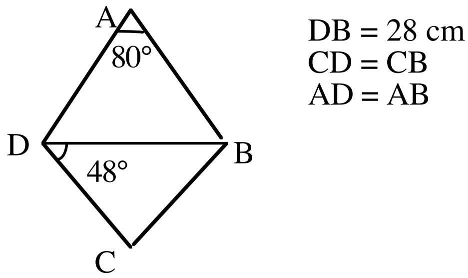
[6] Sur l'idée de preuve voir Nicolas Balacheff, *Une étude du processus de preuve en mathématiques au collège*, thèse, Institut Polytechnique de Grenoble, 1988 ou Jean Houdebine, *La démonstration, écrire des mathématiques au collège et au lycée*, Hachette Éducation, 1998.

[7] Fiche 61 du livre *La démonstration, écrire des mathématiques au collège et au lycée,* Hachette Éducation, 1998.

[8] Mireille Picard, *Initiation à la démonstration dès la Sixième*, Bulletin de l'APMEP N°382, 1992.

[9] Jean-Pierre Muller, *Démonstration en géométrie de Quatrième*, Repères IREM N°15, Topiques Éditions, 1993.

Exemple 4 : Annick Massot et Michel Jaffrot provoquent des conflits, entre les élèves d'une classe de Cinquième ou de Quatrième à l'occasion de la construction de la figure ci-contre qui ressemble à un losange[10].



Exemple 5 : Gilbert Arsac[11] propose à des élèves de Cinquième « Existe-t-il un triangle de côté 4, 5 et 9 ? » Il fait une analyse détaillée d'une séquence qui utilise la technique des affiches et du débat.

Remarques :

Il faut que la conjecture intéresse vraiment les élèves. Pour cela il faut choisir des situations qui soient réellement problématiques et concevoir une séquence suffisamment longue sur la situation choisie pour que les élèves puissent se l'approprier. S'il y a conflit entre les élèves il faut prendre les moyens de le surmonter.

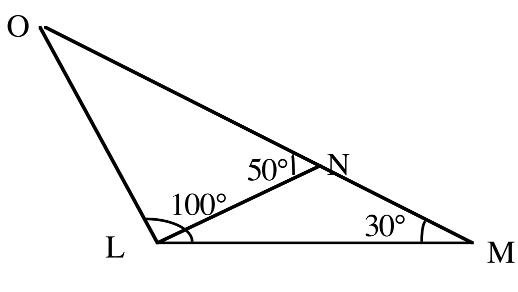
Une proposition sur la vérité de laquelle aucun élève n'a de doute n'est guère adaptée pour jouer le rôle de conjecture.

Pour les élèves, les preuves pour valider une conjecture ne sont pas le plus souvent une démonstration. Il est donc indispensable d'anticiper ce que les élèves accepteront comme preuve avant de fixer des contraintes à leur production.

Puisque la démonstration est un texte, il est préférable, si l'on veut favoriser la production de preuves proches de la démonstration, que l'activité comporte l'écriture d'un texte. Si c'est le cas, cette tâche doit être clairement explicitée pour les élèves.

b – Tâches de construction où il est nécessaire de déduire pour faire

Exemple : Claude Frelet[12] propose à des élèves de Cinquième de construire la figure ci-dessous. Nous avons décrit cette activité dans le paragraphe précédent.



Remarques

[10] Annick Massot et Michel Jaffrot, *Quelques outils pour l'apprentissage de la démonstration*, Repères IREM N°12, Topiques Éditions, 1993.

[11] Gilbert Arsac, *Les limites d'un enseignement déductif de la Géométrie*, Petit X N°47, Grenoble, 1998.

[12] Claude Frelet, *Preuve pour écrire en Cinquième*, Repères IREM N°12, Topiques Éditions, 1993.

Il faut que l'élève ait réellement travaillé sur la construction pour qu'une réflexion existe ; donner un programme de construction, puis demander de justifier cette construction a peu de chances de déclencher ce type de réflexion.
L'élève ne sait pas toujours exprimer certaines déductions bien réelles qu'il fait dans ce type de situations ; même si on lui demande d'expliquer la construction, il cherche parfois une explication qui n'a pas de rapport avec les déductions qu'il a faites pour trouver la construction.

4.4. DES TACHES POUR DONNER DU SENS A UNE PHRASE

L'une des difficultés des élèves est de comprendre le sens précis d'une phrase. Souvent l'élève se contente de comprendre de quoi il s'agit, et cela conduit par exemple à des confusions entre théorème direct et théorème réciproque ou encore entre théorème réciproque et contraposée. Quand on constate des erreurs de ce type, l'intervention de l'enseignant est le plus souvent peu efficace. L'élève acceptera sa remarque, mais son attitude fondamentale de ne pas rechercher le sens précis de ce qui est dit a peu de chance d'être modifiée.

Exemple 1 : Demander, dans une situation donnée, la vérité d'une phrase ; la réponse étant du type : vraie, fausse, on ne peut pas savoir. Claude Golzi et Marie-Noëlle Rolland[13] proposent par exemple :

Voici une phrase exacte : « l'inconnue x représente une longueur, l'équation (E) n'a pas de solution négative ». Pour chacune des questions suivantes entourer la bonne réponse : oui, non, on ne peut pas savoir.

Voici quelques unes des questions posées :
– *(-2) est-il solution de l'équation (E) ?*
– *3 est-il solution de l'équation (E) ?*
– *Le nombre t n'est pas solution de l'équation (E). t est-il négatif ?*

Exemple 2 : Au cours d'une recherche, deux élèves proposent les deux phrases suivantes :

– *OICD est un parallélogramme parce que ses diagonales [OC] et [ID] se coupent en leur milieu.*
– *Si M est le milieu de [ID] et si OICD est un parallélogramme alors M est le milieu de [OC] parce que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.*

Un conflit apparaît alors entre les élèves pour savoir si elles veulent dire la même chose. Marie Agnès Egret propose[14] de résoudre ce conflit en faisant découper les phrases et en reliant chacun des morceaux par des flèches qui indiquent la signification. Cette action semble efficace, mais la description de ce qui se passe dans la classe n'est pas assez détaillée pour qu'elle soit facilement reproductible.

Exemple 3 : Les élèves perçoivent mal les quantificateurs qui sont présents dans certaines phrases. Faire compléter ces phrases par des mots comme : *le, la, un, une, certains, aucun, tous, parfois, toujours, jamais*, peut être un moyen de les mettre en évidence. Par exemple, l'IREM de Rennes propose des activités de ce type[15] :

– Complète en choisissant parmi les mots *parfois, toujours, jamais* : « Un quadrilatère qui a un angle droit est.......... un rectangle ».

---

[13] Claude Golzi et Marie-Noëlle Rolland, *Aide au raisonnement*, Feuille de vigne N°56, IREM de Clermont-Ferrand, 1995.

[14] Marie-Agnès Egret et Raymond Duval, *Comment une classe a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration*, Annales de didactique et de sciences cognitives N°2, IREM de Strasbourg, 1989 ou Repères IREM N°12, 1993.

[15] *Lire et écrire des textes mathématiques : vers la rédaction de démonstration*, IREM de Rennes, 1992.

– Complète en choisissant parmi les mots *le, la, un, une* : « Trace....... droite passant par....... point A et sécante à...... droite (D) » (une figure comportant la droite D et le point A accompagne la question).

Remarques

Si l'enseignant cherche à s'appuyer sur les désaccords entre les élèves, la difficulté est de gérer la discussion pour qu'elle aboutisse de manière positive. Les publications sur ce sujet sont souvent insuffisamment explicites sur cette gestion. Il va de soi qu'une telle activité est beaucoup plus intéressante pour les élèves si elle intervient au moment où un problème de ce type se pose.

4.5. DES TACHES CONCERNANT LES ENONCES DE THEOREME

La maîtrise des *théorèmes* est évidemment un point important de l'apprentissage. Mais il faut distinguer ici plusieurs objectifs :
– au niveau du contenu, donner du sens au théorème, savoir dans quelles situations il peut être utile ;
– au niveau de l'énoncé, reconnaître le même théorème dans divers énoncés, repérer les hypothèses et la conclusion, distinguer le théorème et sa réciproque (on rejoint ici le paragraphe précédent dans le cas particulier des énoncés de théorème).
Ces différents objectifs sont rarement atteints d'emblée ; les activités peuvent donc prendre place au moment de la découverte du théorème, ou quelque temps après ou encore au moment où une difficulté surgit.

a – Théorème introduit comme une conjecture

Le théorème peut être introduit comme une conjecture qu'il faut valider ou rejeter. Mais il faut dans ce cas concevoir un scénario qui conduise les élèves à s'intéresser réellement à cette conjecture.

Exemple 1 : Pour le théorème des milieux, l'utilisation de CABRI géomètre met en évidence que la longueur du segment joignant les milieux de deux côtés est constante quand on déplace le sommet commun, même pour les triangles *tout en longueur* ; cette expérience rend les élèves curieux de comprendre pourquoi ce phénomène se produit.

Exemple 2 : La somme des angles d'un triangle fait 180°. N. Balacheff[16] propose une longue séquence pour faire naître cette conjecture. Au cours de cette séquence des élèves de Cinquième doivent tour à tour faire un pari sur la somme des angles de certains triangles et mesurer cette somme. Évelyne Barbin préfère aborder la question sous la forme : quelles figures sont susceptibles de paver le plan ?[17]

Remarque

Ces deux publications montrent combien il est difficile de faire naître une véritable conjecture, c'est-à-dire de faire découvrir par les élèves une propriété dont ils ne sont pas certains, qui crée un vrai conflit dans la classe et à propos de laquelle beaucoup d'élèves ont envie de rechercher une preuve.

Exemple 3 : Pour introduire le théorème de Pythagore, Étienne Thépot[18] propose une longue séquence. Celle-ci comporte en particulier des travaux sur des puzzles et l'idée

---

[16] Nicolas Balacheff, op. cit.

[17] Évelyne Barbin, *Quelles conceptions épistémologiques de la démonstration*, Repères IREM N°12, Topiques éditions, 1993.

[18] Étienne Thépot, *Activités géométriques autour de Pythagore*, IREM d'Orléans, 1988.

intéressante de raisonner sur des figures en perspective cavalière. Cette proposition demanderait sans doute un travail de validation et de mise au point (la longueur de la séquence proposée peut décourager bien des enseignants).

Remarque

Robert Noirfalise[19] explique comment une séquence sur le théorème de Pythagore très orientée sur le découpage des aires peut faire disparaître aux yeux des élèves la relation entre les longueurs des côtés, qui est pourtant le point central du théorème vu en Quatrième.

b – Rechercher les énoncés de théorèmes utiles dans une situation donnée

Au cours de la résolution de problèmes au collège, les connaissances utilisées par les élèves ne font pas toujours référence à un énoncé explicite. Il est possible de favoriser cette référence sans pour autant demander un texte de démonstration. L'énoncé précis des théorèmes joue un rôle important dans ce type de tâche.

Exemple 1 : On ajoute des questions « pourquoi ? ». Cette manière de faire n'atteint pas toujours l'objectif visé. Dans l'esprit d'un élève débutant, la question « pourquoi ? » signifiera souvent « quelles sont les connaissances utiles ? » ; dans ces conditions énoncer le théorème direct ou le théorème réciproque est, en quelque sorte, équivalent du point de vue de l'élève. Pour l'enseignant au contraire il s'agit de fournir un énoncé très précis. Pour éviter que ce conflit soit insurmontable, il faut sans doute laisser assez de liberté à l'élève dans la forme de sa réponse.

Exemple 2 : Trouver les énoncés des théorèmes utilisés dans une démonstration donnée. Dans l'activité *rédiger en liberté*[20], on demande aux élèves de le faire dans plusieurs démonstrations, après un long travail préparatoire sur la situation concernée. L'efficacité de cette activité semble provenir en particulier de la comparaison de démonstrations à l'évidence équivalentes, l'une contenant clairement l'énoncé l'autre ne le contenant pas.

Exemple 3 : Trouver les théorèmes utiles pour étudier une figure dont on connaît certaines propriétés.

Remarque

La principale difficulté pour mettre au point de telles activités est de leur donner du sens. L'enjeu principal est d'écrire des énoncés précis et d'en discuter. Si ces énoncés sont très simples à écrire, il y aura peu de réflexions sur la précision des énoncés. Au contraire, des énoncés complexes (« si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre ») ou inhabituels favoriseront la réflexion sur leur signification.

4.6. DES TACHES POUR DONNER DU SENS A LA DEMONSTRATION

La démonstration est, pour les élèves débutants, un type de texte nouveau ; beaucoup n'en comprennent pas l'intérêt et le rôle. Or pour aborder la démonstration, la plupart des enseignants s'appuient sur des situations géométriques simples ; et dans ces situations beaucoup d'élèves ne voient pas ce que ce texte d'un type nouveau leur apporte. Ce n'est donc que sur des situations suffisamment problématiques que le sens peut apparaître aux élèves ; mais comment les choisir et les gérer pour que les élèves les maîtrisent suffisamment ?

---

[19] Robert Noirfalise, *Analyse de pratiques des élèves et des enseignants en mathématiques à partir du cahier de l'élève*, Petit X n°38, Grenoble, 1994.

[20] *La démonstration en Seconde*, IREM de Rennes, 1995.

Exemple 1 : Proposer une situation dans laquelle les élèves de la classe ont un doute sur une propriété : par exemple la question de l'alignement des points proposée ci-dessus.

Exemple 2 : Pour certains élèves de Première S, la démonstration n'a pas encore un sens clair. L'un des points d'appui pour surmonter cet obstacle est de mettre en évidence la place de la démonstration dans l'histoire des mathématiques. Dans cet esprit, par exemple, Michèle Grégoire[21] propose à des élèves de Première l'étude d'une démonstration de A.M. Legendre concernant le volume de la pyramide.

Exemple 3 : Marie-Claire Demongeot et Michèle Gandit proposent à des élèves de Première et de Terminale le problème suivant :

Énoncé : si (D) et (D') sont deux droites données. A et A' deux points n'appartenant ni à (D) ni à (D'). A tout point M de (D) on associe le point M' d'intersection de (D') et de la parallèle à (AM) passant par A'. Que se passe-t-il pour les droites (MM') ?

Les conjectures émises par les élèves sont suffisamment complexes pour donner du sens à leur démonstration.

Remarque

Pour cet objectif, plus que pour d'autres, le choix d'une activité dépend essentiellement du contexte. L'expérience montre en effet qu'une modification légère de celui-ci peut déclencher ou faire disparaître l'intérêt des élèves pour une conjecture.

4.7. DES TACHES SUR L'UTILISATION DES MOTS DE LIAISON

La structure du texte de démonstration est marquée par l'usage de mots et d'expressions spécifiques, par des dispositions adaptées. Celles-ci mettent en particulier en évidence les statuts des différentes propositions. Une maîtrise de l'usage de ces mots de liaison semble donc l'un des éléments importants dans l'apprentissage.

Exemple 1 : De nombreuses activités ont été proposées pour aider les élèves dans la maîtrise de la locution « si... alors ». Une première idée est de demander aux élèves, dans des situations bien maîtrisées, si des phrases contenant cette expression sont vraies ou non. Par exemple, *Je, tu, il, elles argument*[22] propose une activité de ce type à propos des propriétés des quadrilatères ; l'idée de contre-exemple y est explicitement introduite.

D'autres propositions consistent à demander de découvrir parmi des phrases écrites avec des mots et des expressions comme « si... alors », « parce que », « comme », « lorsque »... celles qui sont équivalentes. Dans le même esprit on demande aussi d'écrire avec d'autres mots une phrase équivalente à une phrase donnée[23].

Remarques

L'une des difficultés cachées pour les phrases contenant un « si.. alors » est le « quel que soit » qui est le plus souvent sous-entendu ; une activité qui ne tient pas compte de cet obstacle a de grandes chances de ne pas fonctionner.

Quand on s'intéresse au lien entre la démonstration et le raisonnement[24], c'est l'idée d'inférence qui est naturellement associée au « si... alors ». Il s'agit de la capacité « d'élaborer,

---

[21] Michèle Grégoire, *Le mystère de la pyramide*, La démonstration dans l'histoire, IREM de Lyon, 1989.

[22] *Je, tu, il, elles argumentent*, IREM de Rennes, 1988.

[23] Rémi Duvert, *Cycle d'observation : préparer la démonstration*, IREM de Picardie, 1993.

[24] Voir par exemple : *La démonstration, écrire des mathématiques au collège et au lycée,* Hachette Éducation, 1998, p. 194 à 204.

à partir d'informations primitives sur l'état de son environnement, d'autres informations sur l'état de ce même environnement »[25]. L'idée de cause et conséquence est ici inadaptée. Il est plus facile de le comprendre dans le cas où les propositions concernées sont en fait équivalentes : par exemple, il est bien difficile de dire, en dehors d'une situation concrète, si la *cause* du fait que « ABCD est un parallélogramme » est que « [AC] et [BD] ont même milieu » ou si au contraire « ABCD parallélogramme » est la *cause* du milieu commun.

Exemple 2 : Pour mettre l'utilisation de ces expressions dans le cadre d'un véritable texte, on peut demander aux élèves de remplir des *trous* dans un texte de démonstration[26]. Il ne semble pas efficace de donner la liste des mots à utiliser.

Remarques

L'emploi des mots de liaison dépend du contexte ; rien ne prouve par exemple qu'une bonne maîtrise dans le cadre d'une argumentation sera réinvestie efficacement dans la démonstration. Cependant beaucoup d'enseignants expérimentés pensent qu'il est utile de faire des travaux spécifiques.

Les indices dont se servent les élèves pour les tâches liées à cet objectif sont souvent non pertinents pour la tâche particulière qui leur est proposée : indice de position, indice de mode du verbe, taille de la place laissée pour une expression manquante etc. Il est donc ici essentiel d'observer les élèves pour s'assurer que les choix faits dans la conception de l'activité font que ces indices ne viennent pas perturber l'objectif d'apprentissage.

Une véritable validation de la bonne réponse aux yeux des élèves est souvent problématique ; une stratégie efficace consiste à proposer à la séance suivante toutes les réponses proposées par les élèves : la classe sait très rapidement trouver les bonnes et rejeter les mauvaises, avec souvent de bonnes raisons[27].

Une autre difficulté est le choix des phrases ou des textes. Pour que l'élève éprouve un intérêt, il faut qu'il y ait une véritable recherche à faire ; donc pas de textes stéréotypés, mais une situation familière.

Il ne faut pas oublier que les mots structurant la démonstration ne sont pas seulement ceux qui annoncent une donnée, un théorème ou une conclusion. Il y a aussi ceux qui articulent les pas entre eux (j'en déduis que...), ceux qui permettent de faire plusieurs pas semblables sans redire à chaque fois la même chose (de la même façon...), ceux qui sont liés aux quantificateurs (soit...)....

Le plaisir d'écrire est l'un des moteurs d'un travail sur l'écriture. Or, pour les élèves, la possibilité d'utiliser des mots de liaison variés, c'est-à-dire d'écrire plus librement, peut apporter ce plaisir.

4.8. DES TACHES POUR TROUVER UN ENCHAINEMENT DEDUCTIF

Pour produire un texte de démonstration, il est nécessaire d'organiser les propriétés en un enchaînement déductif. Certaines tâches permettent à l'élève d'effectuer ce travail sans pour autant être obligé d'écrire une démonstration.

Exemple 1 : Reconstruire une démonstration puzzle.

---

[25] Traité de psychologie cognitive (tome 2), Dunod, 1990.

[26] Voir par exemple la fiche 86 de *La démonstration, écrire des mathématiques au collège et au lycée*, Hachette Éducation, 1998, ou Claude Golzi et Marie-Noëlle Rolland, *Aide au raisonnement*, Feuille de vigne N°56, IREM de Clermont-Ferrand, 1995.

[27] Voir par exemple page 30 à 33 dans *La démonstration en Seconde*, IREM de Rennes, 1995.

Exemple 2 : Compléter des tableaux du genre « je sais que », « d'après la propriété », « j'en conclus que » ; cette idée est longuement développée par Denise Frère[28]. Cependant elle se place dans le cadre d'un dispositif pédagogique exigeant et il est bien difficile de savoir, dans les succès obtenus, quelle est la part de ce dispositif et celle des activités de ce type. Une question n'est pas abordée clairement : celle du réinvestissement dans l'écriture d'un texte de démonstration.

Exemple 3 : Plan de raisonnement : Isabelle Geslin[29] propose à des élèves de Seconde d'écrire ce qu'elle appelle des plans de raisonnement (qui sont d'ailleurs plutôt des plans de résolution de problème). Cela donne par exemple pour une question du type : « O, A et P sont-ils alignés ? » :

– *Placer le repère en O*
– *Donner les coordonnées de A et P*
– *Écrire l'équation de (AP)*
– *Chercher si O est un point de (AP)*
– *Conclure.*

Mais elle ne précise pas comment l'enseignant explique aux élèves ce qu'est un plan de raisonnement. Cette idée demanderait sans doute une étude car l'écriture de textes intermédiaires avec moins de contraintes que la démonstration est certainement une idée exploitable.

Remarques

Il est d'abord essentiel de noter qu'il ne s'agit pas de tâches d'écriture ; elles ne préparent donc pas directement à la production de démonstrations. Pour éviter que l'intervention trop fréquente de l'enseignant ne vienne vider cette activité de sa signification, il est préférable d'organiser un travail de groupes ; les conflits qui surgissent donnent du sens aux réponses.

4.9. DES TACHES POUR L'APPRENTISSAGE DE L'ECRITURE

Au moment où commence l'apprentissage de la démonstration, certains élèves ont une pratique quasiment inexistante de l'écriture en mathématiques. On peut penser que c'est un handicap important. C'est pour cet objectif que l'on trouve le plus d'idées originales. L'écriture est en effet une tâche complexe et il y a donc des moyens variés de la préparer.
Longtemps après la Quatrième, certains élèves ont encore des difficultés à écrire. Est-il encore utile de leur proposer des tâches d'écriture en mathématiques qui ne soient pas des démonstrations ?

Exemple 1 : Les narrations de recherche : plusieurs articles de l'IREM de Montpellier[30] décrivent cette pratique : il s'agit de demander à l'élève d'écrire la « suite des actions qu'il a réalisées au cours de la recherche d'un problème de mathématiques ». Elle permet à l'élève de s'habituer très tôt à produire des textes significatifs à l'occasion de la résolution de problème. Une bonne gestion du contrat permet d'orienter les élèves vers la démonstration.

Cette pratique suppose un choix de problèmes bien adaptés dont voici deux exemples :
– *construire le centre de gravité d'un triangle dont l'un des sommets est hors de la feuille en n'utilisant que des tracés sur la feuille,*
– *déterminer le nombre de segments que l'on peut obtenir à partir de n points distincts.*

---

[28] Denise Frère, *Différencier la pédagogie*, CRDP de Créteil, 1997.

[29] Isabelle Geslin, *Rectangles emboîtés*, Bulletin Inter IREM second cycle, 1993.

[30] Freddy Bonafé, *Narrations de recherche, un outil pour apprendre à démontrer,* Repères IREM N°12, Topiques Éditions, 1993.

Remarques

Les articles ne précisent pas suffisamment comment surmonter les difficultés des élèves qui, tout en produisant des textes qui ont l'air de démonstration, ne comprennent pas vraiment la structure de ces textes.

Une pratique tout à fait proche a été expérimentée avec succès par Luc Trouche[31] en Seconde à propos de problèmes posés par l'utilisation des calculatrices.

Exemple 2 : La maîtrise de la lecture précise d'un énoncé est l'un des aspects de cette maîtrise du texte écrit par les élèves. De nombreuses tâches sont proposées dans ce but, avec l'idée de minimiser la réflexion sur la résolution du problème et de la centrer sur la tâche de lecture :

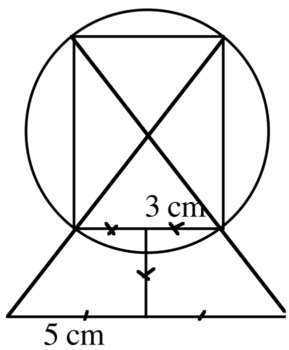
– Mettre les lettres d'une figure à partir d'un énoncé.
– A. Massot et M. Jaffrot proposent de reconnaître parmi plusieurs figures celles qui conviennent à l'énoncé ou d'associer des figures à des énoncés[32].
– Michèle Martin[33] propose d'ajouter des questions à un énoncé complexe :

Construire
Un segment [AB] de 5 cm et de milieu O
Un cercle C de diamètre [AB]
Un cercle L de centre B et de rayon AB
La droite perpendiculaire à [AB] en O qui coupe C en I et J
La droite perpendiculaire à [AB] en B qui coupe L en E et F, E étant placé du même côté que I par rapport à la droite (AB)
Poser trois questions sur cette figure

Notons que, dans cette activité, l'objectif n'est pas seulement la maîtrise de la lecture de l'énoncé. Il faut avoir construit la figure et en faire une bonne analyse pour pouvoir poser les questions.

Exemple 3 : Programme de construction.

De nombreuses activités de ce type sont proposées. Citons par exemple celle décrite par Michèle Martin[34] pour des élèves de Sixième ou de Cinquième. Il s'agit d'écrire, pour quelqu'un qui doit refaire la figure, un programme de construction pour la figure ci-contre. L'intérêt de cette activité est ici double : d'une part elle est l'occasion d'écrire des mathématiques en mettant au point un texte. D'autre part elle oblige à faire des déductions avant de s'engager dans la rédaction de ce texte.



Remarques

Lire, écrire, parler ont des liens complexes (c'est vrai dans toutes les disciplines). Rappelons que l'objectif est ici de favoriser l'écriture de véritables textes et non de mettre simplement par

[31] Luc Trouche et 37 élèves de Terminale, *Expérimenter et prouver, 38 variations sur un thème imposé,* Université de Montpellier II, 1998.

[32] Annick Massot et Michel Jaffrot, *Quelques outils pour l'apprentissage de la démonstration*, Repères IREM N°12, Topiques Éditions, 1993.

[33] Michèle Martin, *Vers le raisonnement déductif au collège*, Document Copirelem, IREM de Grenoble, 1993.

[34] Michèle Martin, Op. cit.

écrit ce qu'on dit[35]. L'élève doit prendre conscience peu à peu de cette différence. Dans cette optique les tâches consistant à reconstituer un texte à partir de puzzle ou de compléter un texte auquel manquent certains mots ne servent pas clairement à l'apprentissage de l'écriture.
Un autre type de difficulté vient de la connaissance imparfaite des réinvestissements quand on passe d'un texte à un autre : écrire tel texte mathématique est-il utile pour écrire une démonstration ? Découvrir par une lecture approfondie la structure d'un texte permet-il de réutiliser les connaissances ainsi acquises pour écrire le même type de texte ? Par exemple repérer des données dans un énoncé peut-il être réinvesti ? Les réflexions théoriques de Raymond Duval conduisent plutôt à penser qu'il y a peu de réinvestissement, les expériences menées par des enseignants semblent plus encourageantes. La vérité se situe sans doute entre les deux.

4.10. DES TACHES POUR ESSAYER DE FAIRE DECOUVRIR LA STRUCTURE DES TEXTES DE DEMONSTRATIONS

Pour comprendre la spécificité des textes de démonstrations, il est essentiel de reconnaître qu'ils sont organisés en pas qui s'articulent entre eux avec l'idée que chaque proposition qui y figure possède un statut : donnée, théorème, conclusion... Plusieurs points de vue s'opposent ici. Les uns insistent sur la maîtrise d'un pas de démonstration isolé ; les activités proposées sont alors par exemple de compléter un tableau *hypothèse, théorème, conclusion*. Les autres estiment que l'articulation entre les pas est un point aussi important que la structure d'un pas isolé ; ils vont plutôt s'orienter vers des tâches concernant des démonstrations complexes. L'aspect *texte* est privilégié par quelques uns ; les démonstrations à un pas sont alors rejetées comme non significatives.

Exemple 1 : Dans un texte de démonstration donné à l'élève, faire souligner des propositions ayant un statut donné : donnée, théorème, conclusion... Cette tâche quand elle est isolée n'offre à l'élève aucun moyen de contrôle ; elle doit donc être intégrée à une séquence qui les lui donne.

Exemple 2 : On propose 4 énoncés et 6 démonstrations avec comme question : Quelle(s) démonstration(s) corresponde(nt) à quel énoncé ? Justifier votre choix[36]. Pour éviter des classements sur des critères sans rapport avec la démonstration, les quatre énoncés portent sur la même figure avec les mêmes lettres.

Exemple 3 : Utiliser des représentations du type déductogramme. Cette manière de faire introduite en particulier par une équipe de Poitiers[37] a été largement diffusée.

Remarque

La complexité des démarches qui permettent de passer du texte au déductogramme ou du déductogramme au texte explique les désaccords sur la manière de conduire ce type d'activité. Par exemple A.L. Mesquita et J.C. Rauscher[38] pensent que les activités proposées par D. Gaud et J.P. Guichard n'aident pas les élèves en difficulté. Notons cependant qu'une enquête faite par l'IREM de Brest auprès d'élèves ayant réalisé ce type d'activités donne un très bon indice de satisfaction.

---

[35] Raymond Duval, *Écriture et compréhension : pourquoi faire écrire des textes de démonstration par les élèves* ? Produire et lire des textes de démonstration, Éditions Ellipses, Paris, 2001.

[36]*Quelles lectures pour quelles tâches* ? IREM de Rennes, 1996.

[37] Dominique Gaud et Jean-Paul Guichard, *Apprentissage de la démonstration,* Petit X N°4, Grenoble, 1984, pages 5-25.

[38] A.L. Mesquita et Jean-Claude Rauscher, *Sur une approche d'apprentissage de la démonstration,* Annales de didactique et de sciences cognitives, volume 1, 1988, Strasbourg, pages 95-109.

Exemple 4 : Écrire en s'inspirant d'un modèle. Une activité de l'IREM de Rennes[39] propose d'abord, côte à côte, une résolution d'une inéquation sans commentaire et le texte d'une démonstration correspondante. Puis on donne aux élèves d'autres résolutions sans commentaires et on leur demande d'écrire la démonstration correspondante en s'inspirant du cas précédent.

Exemple 5 : Á partir d'une figure, écrire un énoncé de problème et sa solution[40].

Exemple 6 : Écrire une démonstration à partir d'une argumentation. Après avoir repéré des arguments dans une *argumentation* entre deux élèves sur le thème : il n'y a pas de fraction dont le carré est 2, on demande d'écrire une démonstration « pour le cours de mathématiques ». Cette activité demanderait de nouvelles expérimentations ; elle pourrait sans doute porter sur des sujets un peu moins difficiles[41].

Remarque

Il serait intéressant de trouver des textes d'argumentation en mathématiques pas trop artificiels et suffisamment éloignés d'une démonstration pour que l'enseignant n'ait pas besoin d'expliquer aux élèves ce qui fait que ces argumentations ne sont pas des démonstrations.

4.11. DES TACHES POUR VAINCRE CERTAINS OBSTACLES

Certains obstacles conduisent à d'importants échecs dans la rédaction de démonstrations. Les uns peuvent être considérés comme faisant partie intégrante de l'apprentissage de la démonstration, les autres peuvent être au contraire liés à la difficulté de certains contenus. Ces contenus font quelquefois l'objet d'activités spécifiques.

a – Condition nécessaire et suffisante, théorème direct et réciproque, contraposée

Les erreurs dans ce domaine sont très fréquentes et les enseignants savent combien il est difficile de faire progresser les élèves sur ce point. Les raisons sont nombreuses et souvent explicitées. Elles peuvent être générales comme la mauvaise maîtrise des énoncés, mais elles peuvent être aussi spécifiques comme la confusion entre le « il faut » mathématique et le « il faut que je démontre » qui précise la meilleure action à entreprendre. Quand un élève de Quatrième se donne pour tâche de résoudre un problème, il peut aussi manquer de motivation pour distinguer, dans le cas d'une équivalence, un théorème de sa réciproque. Beaucoup d'enseignants pensent qu'une action spécifique est nécessaire, mais nous manquons de publications décrivant des activités bien validées adaptées à cet objectif. Citons cependant :

Exemple 1 : Marie Chomette suggère de classer de très courtes démonstrations sur les nombres complexes selon que le théorème évoqué est « si z est réel alors il est égal à son conjugué » ou « si z est égal à son conjugué, il est réel »[42].

Exemple 2 : A. Antibi affirme qu'il est plus facile et plus fructueux de rédiger une démonstration par l'absurde que d'utiliser la contraposée[43].

---

[39] *Je, tu, il, elles argumentent*, IREM de Rennes, 1988.

[40] François Pluvinage, Jean Claude Rauscher, D. Marriette, C. Hindebang, *Vers l'apprentissage du raisonnement en Géométrie,* Suivi Scientifique Quatrième, 1987-1988, pages 359 et 360.

[41] *Je, tu, il, elles argumentent*, IREM de Rennes, 1988.

[42] Marie Chomette, *Á propos de l'atelier : problèmes de langage (et autres) autour de la démonstration*, Taol Lagad N° 69, IREM de Brest, 1995.

[43] Par exemple dans sa thèse.

b – Alignement et milieu

On rencontre souvent dans les démonstrations d'élèves une faute concernant les milieux qui consiste à démontrer uniquement une égalité de longueur et à admettre l'alignement. Même de bons élèves sont concernés. Une action spécifique est nécessaire.

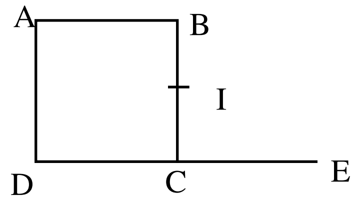
Exemple : L'IREM de Rennes[44] propose une séquence pour aider les élèves à surmonter ces difficultés. Elle contient en particulier un travail qui a pour but de faire découvrir aux élèves que la démonstration ci-dessous n'utilise pas la donnée « BI = IC » contenue dans « I milieu de [BC] ». Comme le résultat n'est pas vrai si I est un point de [BC] distinct du milieu, cette démonstration contient une faute qu'il va falloir rechercher.

Énoncé

ABCD est un carré. I est le milieu de [BC] et E le symétrique de D par rapport à C. Montrer que I est le milieu de [AE].

Démonstration

ABCD est un carré, alors [AD] est parallèle à [BC].
On sait que E est le symétrique de D par rapport à C, donc C est le milieu de [DE].
Dans le triangle ADE, la droite (CI) est parallèle à un côté [AD] et elle passe par le milieu d'un autre côté [DE], donc elle coupe le troisième côté en son milieu.
Donc I est le milieu de [AE].



Remarque

On manque de publications sur ce sujet.

c – Un carré est un losange

On sait que dans le langage courant le mot losange ne s'applique pas au carré. De la même façon « un carré n'est pas un rectangle » et « un rectangle n'est pas un parallélogramme ». Il n'est donc pas surprenant que certains élèves pensent qu'en mathématiques il en est de même. Cela les conduira à des fautes qui ne sont pas des fautes de *raisonnement* mais simplement des erreurs dans la signification des mots. Par exemple, les élèves construisent un carré quand on leur pose la question : « Peux-tu tracer un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires et qui ne soit pas un losange ? si oui fais-le, sinon explique pourquoi. » Ils expliquent alors que : « le quadrilatère peut être un losange si ses diagonales n'ont pas même longueur »[45]. Il n'y a pas d'activités décrites pour vaincre ce type d'obstacle.

d – Principe d'information maximum

De la même façon, les élèves refusent de considérer « $3 \leq 5$ » comme une proposition vraie. Ce refus s'explique, car l'usage, dans la langue ordinaire est de donner l'information maximum. Là encore il ne s'agit pas d'une faute de raisonnement mais de comprendre les spécificités du langage mathématique. On trouvera une séquence cherchant à faire atteindre cette compréhension par les élèves dans *la démonstration en Seconde*[46].

---

[44] *La démonstration en Seconde,* IREM de Rennes, 1995.

[45] Georges Blanc, *Dimension logique de l'activité mathématique au collège et au lycée*, IREM d'Aix Marseille, 1994.

[46] *La démonstration en seconde*, IREM de Rennes, 1995.

5. LE ROLE DES MULTIMEDIAS

Les multimédias sont appelés dans l'avenir à jouer un rôle important dans l'apprentissage de la démonstration. Nous n'avons pas eu le temps, dans le cadre de ce travail de rédiger un paragraphe spécifique. Notons simplement qu'on peut trouver des informations à ce sujet sur le site de Grenoble ou dans des livres comme *La démonstration, écrire des mathématiques au lycée et au collège*[47] ou *Produire et lire des textes de démonstration*[48].

CONCLUSION

Comme on le voit, de nombreux types d'activités ont été imaginés pour l'apprentissage de la démonstration. Mais, en lisant les articles sur le sujet, on constate que cette richesse n'est pas exploitée de manière satisfaisante. Ce sont trop souvent les mêmes idées qui reviennent alors qu'à l'évidence ce ne sont pas les mieux adaptées aux objectifs visés. Nous souhaitons que cette description, bien que rapide et incomplète, contribue à ce que chacun profite mieux de toutes ces possibilités.

Pour beaucoup d'activités on aimerait avoir des descriptions plus explicites et éventuellement des études plus précises pour connaître leur rôle et les conditions qui favorisent leur efficacité pour l'apprentissage. En particulier le lien entre des articles *théoriques* et des articles décrivant des activités est insuffisant.

La conception d'activités nouvelles est nécessaire. Donnons quelques urgences.

– La correction des copies est l'un des moyens de transmettre les connaissances sur la démonstration. Le travail de correction est astreignant pour l'enseignant, et malheureusement peu efficace auprès de certains élèves. Il faudrait concevoir des activités qui allègent le travail pour l'enseignant et obligent l'élève à une véritable activité autour des corrections de l'enseignant. Les idées ne manquent pas : faire lire la copie d'un élève, la faire noter par les élèves, le professeur propose alors sa note et on discute ; demander à l'élève après l'écriture d'une démonstration le degré de certitude sur le résultat obtenu ; etc. Mais aucune activité n'est décrite en détail.

– « Écrire c'est réécrire ». Cette idée simple et fondamentale n'est pas illustrée par des activités, en particulier au niveau de la Quatrième.

---

[47] Jean Houdebine, *La démonstration, écrire des mathématiques au collège et au lycée*, Hachette Éducation, 1998.

[48] *Produire et lire des textes de démonstration,* Éditions Ellipses, Paris, 2001.