III

LES THEOREMES

La liste des théorèmes de géométrie relevée à partir d'un seul manuel a surpris tous les membres du groupe. A-t-on vraiment besoin de tout cela pour l'apprentissage de la démonstration ?

Pour chacun de ces théorèmes nous n'avons envisagé qu'une seule formulation, or les variantes sont nombreuses et ne sont pas du tout synonymes (et encore moins substituables de manière quasi-implicite) pour les élèves.

Nous avons fait une analyse a priori sur ces théorèmes en nous posant la question "Comment sont-ils utilisés par les élèves dans les différentes classes ?" Nous avons choisi comme réponses possibles les réponses suivantes :

- Le théorème n'est pas utilisé à ce niveau. Par exemple le théorème de Thalès en 6ème.

- Le théorème est utilisé mais non cité. Par exemple en 4ème : "(AB) est parallèle à (BC), $(A'B')$ est parallèle à (BC) donc (AB) est parallèle à $(A'B')$" sans parler de la transitivité du parallélisme.

- Le théorème est utilisé sous la forme "parce que" ou "par définition". Par exemple "Le triangle ABC est isocèle parce qu'il a ses deux côtés égaux".

- Le théorème est cité complètement entre les hypothèses et la conclusion et sous forme non instanciée. Par exemple "$ABCD$ est un rectangle, comme les diagonales d'un rectangle sont égales, $AC = BD$".

- Le théorème est cité sous forme instanciée. Par exemple : "Les diagonales $[AB]$ et $[CD]$ du rectangle $ABCD$ sont égales".

- Une dernière catégorie regroupe les autres utilisations des théorèmes. Théorème de Pythagore avec développement de calculs. Autre exemple : "(AH) est hauteur du triangle ABC, puisqu'elle passe par l'orthocentre H".

Les résultats de cette analyse ont été consignés dans un tableau dont on donne un extrait plus loin. Nous avons constaté a priori une grande difficulté de tomber d'accord et nous pensons maintenant que cette analyse ne deviendrait intéressante que si elle faisait suite à une enquête auprès de nombreux enseignants et d'une étude de nombreuses copies d'élèves.

GEOMETRIE DANS LE PLAN

1 - Par deux points distincts, il passe une et une seule droite.

DROITES PARALLELES ET DROITES PERPENDICULAIRES

2 - Il existe une et une seule droite passant par un point et parallèle à une droite donnée (propriété d'Euclide).

3 - Si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.

4 - Si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

5 - Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.

6 - Il existe une et une seule droite passant par un point et perpendiculaire à une droite donnée.

DISTANCES

7 - <u>*Si*</u> $M \in [AB]$, <u>*alors*</u> $AM + MB = AB$.

8 - Inversement, <u>*si*</u> $AM + MB = AB$ <u>*alors*</u> $M \in [AB]$ (les points sont alignés).

9 - <u>*Si*</u> $M \notin [AB]$, <u>*alors*</u> $AM + MB > AB$.

10 - Inversement, <u>*si*</u> $AM + MB > AB$ <u>*alors*</u> $M \notin [AB]$.

11 - Inégalité triangulaire : A, B,C étant trois points quelconques, on a : $AC \leq AB + BC$.

TANGENTE

12 - <u>Définition de la tangente</u> : On appelle tangente en H à un cercle (C) de centre O la droite perpendiculaire en H au rayon $[OH]$ de cercle.

13 - <u>Propriété de la tangente</u> : La tangente en H à un cercle (C) a un <u>seul</u> point commun : H avec ce cercle (C).

MEDIATRICE D'UN SEGMENT

14 - <u>Définition de la médiatrice</u> : On appelle médiatrice d'un segment la droite unique perpendiculaire à ce segment en son milieu.

<u>Propriété caractéristique de la médiatrice</u>

15 - Si un point appartient à la médiatrice d'un segment, alors ce point est équidistant des extrémités de ce segment.

16 - <u>Propriété réciproque</u> : Si un point est équidistant des extrémités d'un segment alors ce point appartient à la médiatrice de ce segment.

SYMETRIE PAR RAPPORT A UNE DROITE OU SYMETRIE AXIALE

17 - <u>Définition</u> : Dire que A' est le symétrique de A par rapport à une droite (D) c'est dire que (D) est la médiatrice du segment $[AA']$.

Propriétés de la symétrie par rapport à une droite

18 - La symétrie axiale conserve les alignements de points, les distances, les angles, les aires.

SYMETRIE PAR RAPPORT A UN POINT OU SYMETRIE CENTRALE

19 - Définition : Dire qu'un point A' est le symétrique de A par rapport à un point I, c'est dire que I est le milieu du segment $[AA']$.

Propriétés de la symétrie par rapport à un point.

20 - La symétrie centrale conserve les alignements de points, les distances, les angles, les aires.

21 - Dans une symétrie centrale, deux droites symétriques sont parallèles.

22 - Deux angles opposés par le sommet sont égaux.

DROITES PARALLELES COUPEES PAR UNE SECANTE

23 - Propriété I : Deux droites parallèles coupées par une sécante forment des angles alternes-internes égaux.

24 - Propriété réciproque . Si deux droites coupées par une sécante forment des angles alternes-internes égaux, alors ces deux droites sont parallèles.

25 - Propriété II : Deux droites parallèles coupées par une sécante forment des angles correspondants égaux (et réciproquement).

TRIANGLES

Propriété des droites particulières d'un triangle.

26 - Dans un triangle, les hauteurs (ou aussi les médiatrices, médianes, bissectrices) se coupent en un même point.

Triangle et milieux

27 - Dans un triangle, la droite qui passe par le milieu d'un côté et qui est parallèle à un deuxième côté passe par le milieu du troisième côté.

28 - Propriété réciproque : La droite qui passe par les milieux de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième côté.

29 - Le segment joignant les milieux de deux côtés d'un triangle a pour longueur la moitié du troisième côté.

TRIANGLES ISOCELES

30 - Définition : Un triangle isocèle a deux côtés de même longueur.

31 - Propriété I : Les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux (et inversement).

32 - Propriété II : Tout triangle isocèle possède un axe de symétrie unique qui est la médiatrice, hauteur, médiane de sa base et bissectrice de son angle au sommet.

TRIANGLES RECTANGLES

33 - Propriété de Pythagore : Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

34 - Propriété réciproque de Pythagore : Si dans un triangle le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est un triangle rectangle.

Triangle rectangle et cercle

35 - Tout triangle rectangle est inscriptible dans un cercle ayant pour diamètre son hypoténuse.

36 - Propriété réciproque : Tout triangle inscrit dans un cercle ayant pour diamètre l'un de ses côtés est rectangle.

PARALLELOGRAMMES

37 - Définition : Un quadrilatère ayant ses diagonales se coupant en leur milieu est un parallélogramme (le point d'intersection des diagonales d'un parallélogramme est son unique centre de symétrie).

Propriétés caractéristiques du parallélogramme

38 - Propriété I : Un parallélogramme a ses côtés opposés parallèles.

39 - Propriété réciproque : Un quadrilatère ayant ses côtés opposés parallèles est un parallélogramme.

40 - Propriété II : Un parallélogramme a ses côtés opposés de même longueur.

41 - Propriété réciproque : Un quadrilatère non croisé ayant ses côtés opposés de même longueur est un parallélogramme.

PARALLELOGRAMME PARTICULIER : LE LOSANGE

42 - Définition : Un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs de même longueur est un losange.

Propriétés caractéristiques du losange.

43 - Propriété I : Un losange a ses quatre côtés de même longueur.

44 - Propriété réciproque : Un quadrilatère ayant ses quatre côtés de même longueur est un losange.

45 - Propriété II : Un losange a ses diagonales perpendiculaires.

46 - Propriété réciproque : Un parallélogramme ayant ses diagonales perpendiculaires est un losange.

47 - Axes de symétrie : Le losange possède deux axes de symétrie : ses deux diagonales.

PARALLELOGRAMME PARTICULIER : LE RECTANGLE

48 - Définition : Un parallélogramme ayant au moins un angle droit est un rectangle.

Propriétés caractéristiques du rectangle.

49 - Propriété I : Un rectangle a quatre angles droits.

50 - Propriété réciproque : Un quadrilatère ayant au moins trois angles droits est un rectangle.

51 - Propriété II : Un rectangle a ses diagonales de même longueur.

52 - Propriété réciproque : Un parallélogramme ayant ses diagonales de même longueur est un rectangle.

53 - Axes de symétrie d'un rectangle : Le rectangle possède deux axes de symétrie : les médiatrices de ses côtés opposés.

PARALLELOGRAMME PARTICULIER : LE CARRE

54 - Définition : Un quadrilatère à la fois losange et rectangle est un carré.
Le carré possède toutes les propriétés du parallélogramme, du losange, du rectangle.

PROPRIETE DE THALES DANS LE TRIANGLE

55 - Propriété de Thalès : Soit un triangle ABC et une parallèle à (BC) coupant (AB) en M et (AC) en N ; alors, on a : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.

56 - Propriété réciproque de Thalès : Soit un triangle ABC et des points A, B, M alignés et A, C, N alignés dans le même ordre tels que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$; alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

57 - Propriété complémentaire : Soit un triangle ABC et une parallèle à (BC) coupant (AB) en M et (AC) en N. Les deux triangles ABC et AMN ainsi formés ont leurs côtés correspondants proportionnels :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

BISSECTRICE

58 - La bissectrice d'un angle c'est la demi-droite qui partage l'angle en deux angles égaux.

59 - Si un point appartient à la bissectrice d'un angle, alors il est équidistant des côtés de l'angle.

60 - Si un point est équidistant des côtés d'un angle, alors il est sur la bissectrice de l'angle.

61 - Dans un triangle les bissectrices sont concourantes en un point appelé centre du cercle inscrit au triangle.