II

LE FRANCAIS DANS LES MATHEMATIQUES

La rédaction de textes mathématiques en langage naturel présente des difficultés spécifiques dues à la fois au vocabulaire et aux structures.

A) LES MOTS

Les mots ou les expressions du langage courant employés en mathématiques prennent souvent un sens très précis. Ce sens peut être différent du sens commun. Il arrive d'ailleurs que certains mots aient déjà plusieurs sens communs. Voici quelques exemples :

1) Les substantifs

- Sommet - Base - Hauteur - Côté.

Ces mots sont liés à la perception de la verticale et de l'horizontale. Un trapèze n'est pas toujours reconnu lorsque ses bases ne sont pas horizontales. Un élève de 4ème qui cherche à redéfinir une hauteur d'un triangle peut dire : "c'est une droite qui passe par un angle, perpendiculairement à une droite du triangle". Le mot "sommet" est souvent remplacé par "angle", "point" ou "coin".

- Opposé/inverse/contraire/symétrique - Sens/direction - Milieu/centre.

Des mots synonymes en français ont des définitions qui en restreignent le champ d'application en mathématiques. Pour définir le milieu M de $[AB]$ un élève écrira : "placer un point M au centre de $[AB]$".

Dans une activité qui consistait à retrouver des figures géométriques mettant en évidence un milieu, on a pu trouver : un cercle et son centre, un carré et ses diagonales, un triangle avec ses trois bissectrices intérieures. La notion de milieu reste vague et n'est pas restreinte au segment.

- Carré/rectangle.

En français un carré n'est pas un rectangle alors qu'il le sera en mathématiques.

- Somme/produit - Médiane/médiatrice.

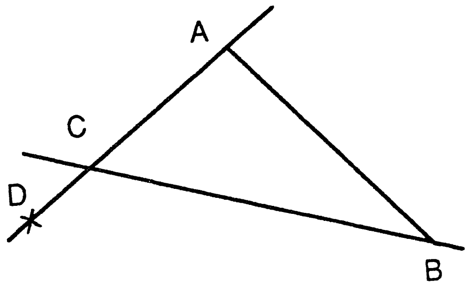
Des confusions fréquentes vont apparaître pour des mots intervenant dans le même environnement mathématique. Ces confusions sont très gênantes même quand elle ne correspondent pas à une erreur de fond.

- Point commun à deux droites (qui est interprété comme la propriété commune à deux droites).

2) Les verbes

Dans les programmes de construction en géométrie, il existe des habitudes de langage : le langage des droites est dynamique, celui des points est statique ; on trace des droites, on place des points.

Voici l'exemple d'une figure, on dira :



La droite (AD) passe par C.
Le segment [AB] relie A et B.
C est situé sur (AD).
C est le point commun à (AD) et (BC).
Les droites (AD) et (BC) se coupent en C.

Il n'est pas rare qu'un élève écrive :

Le segment [AB] passe par A et B.
Le point C coupe la droite (AD).
Les points A et B se rencontrent (se croisent, s'interceptent) en C.

L'utilisation des temps est aussi une difficulté. L'indicatif est le plus souvent employé par l'enseignant, mais on pourra voir apparaître le futur ou le conditionnel pour marquer une conjecture, un raisonnement par l'absurde.

3) Les articles

- L'article défini traduit l'unicité et son usage n'est pas ambigüe.
  Exemple : "tracer la parallèle à la droite Δ passant par le point A".
  L'élève qui trace n'importe quelle parallèle en lisant cette consigne est passé à l'action avant de lire toute la phrase, il n'a pas perçu l'article comme un signe d'unicité (on remarque des coupures de ce type dans la lecture d'expressions numériques, dans le calcul de $15 + 23 \times 2$, l'élève passe souvent à l'action avant une lecture complète).

- L'usage de l'article indéfini est plus nuancé, d'autant plus qu'en français il se confond avec le cardinal "un" (nous n'avons pas la distinction qui existe en anglais entre "a" et "one").
  Dans la phrase "un triangle isocèle a un axe de symétrie", le premier article signifie "n'importe quel" et le second "au moins un". Dans un autre contexte, il pourra signifier "un et un seul".

- Le passage d'un article indéfini à un article défini peut changer le sens du mot qu'il détermine : dans un cercle, un rayon est un segment, le rayon est une longueur.

Dans le cadre d'une préparation à la démonstration, il est possible de proposer aux élèves, dès la classe de 6ème, des exercices de langage qui peuvent se présenter sous la forme de textes "à trous" comme dans la fiche ***"Le, la, un, une"***.

B) LES PHRASES

1 - Les mots de liaison

A partir de la classe de 4ème, l'élève est initié à l'argumentation par son professeur de français, il aura à utiliser les mêmes mots que dans une démonstration en géométrie, quelques différences apparaissent :

- L'usage du "or" fréquent en démonstration pour introduire un théorème ou les données est rare en français et peut marquer une opposition.
  Exemple "je désire sortir, or il pleut, donc je ne sors pas".

- L'usage du "si ... alors" est presque réservé à l'énoncé des théorèmes.
  Dans le langage courant, la construction classique est celle du potentiel : "s'il fait beau, j'irai à la plage". On rencontre moins souvent, dans le contexte d'une narration, le présent d'habitude : "s'il fait beau, je vais à la plage". Cette deuxième construction est plus proche de l'usage en mathématiques :
  "Chaque fois qu'il fait beau, je vais à la plage".
  "Chaque fois que je dessine un parallélogramme, ses diagonales ont le même milieu"

  La relation cause ↔ conséquence est aussi différente dans les deux domaines.

  * Il est rare qu'en français on puisse échanger la cause et la conséquence sans tenir des propos absurdes.
    Exemple : "Il pleut parce que je prends mon parapluie".
    En mathématiques on peut dire, suivant les données, "ce triangle est isocèle parce qu'il a deux côtés égaux" ou "ce triangle a deux côtés égaux parce qu'il est isocèle".

  * D'autre part l'analyse grammaticale d'une phrase en deux propositions dont l'une exprime la cause et l'autre la conséquence, ne se superpose pas au découpage d'un texte mathématique en données et conclusion.

    En voici un exemple, tiré de la fiche ***"Et pourquoi pas ... parce que ?"***

    "Ce parallélogramme est un rectangle parce qu'il a un angle droit".
    Le découpage grammatical est simple, or la conclusion "est un rectangle" est conséquence de deux données "parallélogramme" et "angle droit" qui ne figurent pas dans la même proposition.

Un travail interdisciplinaire semble nécessaire pour détecter ce qui est source de difficultés pour l'élève, ce travail a été abordé dans le polycopié "Je, tu, ils elles argumentent" (I.R.E.M. de Rennes) ; en particulier "le losange de Guerlédan" traite de l'usage des mots de liaisons dans un texte démonstratif.

2 - La structure de la phrase

- Dans un programme de construction, l'objectif est double : définir les points et les nommer. Cette double contrainte conduit à des textes qui sont parfois de véritables "casse-tête", en voici un exemple :

Soit un triangle ABC, la parallèle à la droite (BC) passant par le point A coupe en E la parallèle à la droite (AC) passant par le point B et en F la parallèle à la droite (AB) passant par le point C.

Les répétitions sont nombreuses dans ce texte mais surtout l'analyse grammaticale est très difficile en raison de la longueur des "groupes sujets" et des "groupes compléments". On remarque dans les nouveaux manuels de 6ème un effort pour découper les textes en phrases plus courtes.

- Dans une démonstration, il n'est pas rare d'aller à la ligne au milieu d'une phrase, le mot de liaison sert alors de "marqueur" pour les données, l'hypothèse ou la conclusion. La phrase du langage discursif est désarticulée, elle est remplacée par un algorithme (cf [4]). C'est au fonctionnement de ce langage d'initiés que nous cherchons à préparer nos élèves.

III

FAIRE TRAVAILLER LES ELEVES SUR DES TEXTES

A) DU LANGAGE ORDINAIRE AU LANGAGE MATHEMATIQUE

Les textes demandés aux élèves dans le premier cycle peuvent sembler très proches de textes ordinaires, c'est le cas de certains "problèmes" de 6ème ou de 5ème ; ils peuvent aussi en être très éloignés, c'est le cas par exemple de la géométrie analytique ou des calculs algébriques. En général, dans le premier cas la plus grande diversité est acceptée et dans le second on respecte les règles strictes d'un calcul ou d'une méthode. Les textes "démonstratifs" entrent dans les deux types de textes.

Pour ces textes on rencontre alors deux types de démarches ou bien un passage en douceur du langage usuel au langage "mathématique" ou bien une rupture très nette. Dans le premier cas on espère que le passage se fera tout seul ou presque ; dans le second on impose une foule de contraintes et on aboutit à des activités qui semblent fonctionner mais qui pour l'élève ont perdu tout sens. Bien entendu l'évaluation finale se fait suivant des critères mystérieux et variables.

Tous les linguistes sont aujourd'hui d'accord pour dire que la compréhension et la production d'un texte suppose un contexte, souvent implicite et qu'elle donne lieu à des inférences (souvent implicites), inférences qui peuvent se tester au niveau des synonymies qui ne sont pas les mêmes pour le professeur et l'élève ; ce qui aboutit à la confusion la plus totale sur ce qu'il faut démontrer ou ne pas démontrer sur la vérité ou la fausseté de certaines propriétés.

De la 6ème à la 3ème on passe d'un langage relativement riche et expressif à un langage des plus abstraits ; on passe des objets aux relations ; d'une logique de l'action à la logique des états. (Pour la première un carré "n'est pas" un parallélogramme tandis qu'il en "est" un pour la seconde).

En 6ème et 5ème, il y a un travail indispensable à faire sur les mots, on commence à utiliser un langage plus abstrait, on essaye de substituer un langage déclaratif à un langage opératoire. On se familiarise avec les implicites des mathématiciens (en particulier : toujours, parfois, jamais à propos desquels il faudra débattre de la validation en mathématiques).

Les démonstrations en 6ème et 5ème devront être très proches de l'argumentation, par exemple n'utiliser que des théorèmes à une seule hypothèse et susceptibles d'un traitement du style "parce que" ou "par définition" (voir plus loin le paragraphe sur les théorèmes) mais pas nécessairement à un pas.

A partir de la 4ème il faudra "faire passer" la **structure** de la démonstration, (structure et enchaînement des pas) plus que la **forme** qui devra rester la plus libre possible.

B) LES PROGRAMMES DE CONSTRUCTION

Parmi les textes mathématiques rencontrés en 6ème et 5ème, le programme de construction est l'un des plus fréquents. En 4ème bien des énoncés de problèmes commencent par un programme de construction. Un travail sur ce sujet est donc une bonne préparation à la lecture d'énoncés mathématiques aussi bien qu'à l'écriture de textes mathématiques.

Classe de 6ème

L'essentiel du travail effectué à ce niveau, est la construction de figures et l'écriture de textes de programmes de constructions.

1) Construction de figures

Reproduire :
Il s'agit de bien observer la figure, de faire bon usage des instruments de dessin (pour cela de nombreuses manipulations sont nécessaires) et de savoir reporter des longueurs égales , des angles égaux.

Faire la figure à partir d'un texte de problème :
Il faut d'abord comprendre le texte, puis manipuler et construire.

Transformer une figure :
Utiliser la symétrie orthogonale.

2) S'exprimer, puis écrire un texte

Après de nombreuses observations, manipulations et représentations, il s'agit de savoir dire ce que l'on fait, puis de l'écrire en se débarrassant progressivement du langage personnalisé, imagé et en termes d'actions utilisé jusque là. (Voir I et II)

On commence à introduire les définitions des concepts, qu'il faut apprendre à utiliser. On découvre et on met en place les propriétés des figures usuelles et les propriétés de la symétrie orthogonale. Et on continue à faire écrire des programmes de construction régulièrement en utilisant ces nouvelles connaissances.

On utilise le plus souvent possible les nouvelles propriétés dans des justifications du type "dire pourquoi. ".

Certaines propriétés peuvent alors prendre le nom de "théorèmes".

Exemple : *Si deux segments de même milieu sont perpendiculaires alors, ce sont les diagonales d'un losange".*

Classe de 5ème

Le travail commencé en 6ème se poursuit, l'élève doit arriver à écrire un programme de construction dans le langage "professeur" (cf activité ***"Texte élève, texte prof"***) et enfin à dégager des informations d'un texte de problème.

1) Construction de figures

On peut proposer plusieurs figures, dans des dimensions et des positions différentes pour éliminer du texte le haut, le bas, la droite et la gauche ainsi que les données métriques.

Ou faire faire la figure à partir de textes ne comportant plus de mesure de longueurs ou d'angles.

Il faut apprendre que la figure tracée ne doit pas être particulière.

Travailler sur des problèmes de recherche du lieu d'un point (Pythagore 5ème exercice 47 page 167) ou "A la recherche du triangle perdu" (Pythagore 5ème page 168).

Transformer une figure dans une symétrie centrale.

2) Ecriture d'un texte

Le programme de construction d'une figure peut ne plus comporter de données métriques mais seulement, des propriétés telles que : milieu, parallèles, perpendiculaires, égalité de longueur etc ; propriétés que les élèves doivent savoir distinguer.

Fin de 5ème une figure étant proposée, les élèves vont écrire les différents programmes de constructions possibles. A ce moment là, on fera remarquer que pour ces programmes

le point de départ est différent.
mais on aboutit à une même figure qui comporte donc les mêmes propriétés.

On peut faire une liste de ces propriétés, puis faire trouver dans ces liste, pour chaque programme de construction écrit précédemment, les propriétés qui ont servies comme points de départ.

On sera amené ainsi, à distinguer

des propriétés **contenues dans le texte**, qui définissent les points de la figure et en permettent la construction que l'on appellera "données du problème", par la suite.

d'autres propriétés qui sont conséquences des premières, futures conclusions du problème.

Par la suite, on pourra expliquer que dans un problème de géométrie, on cherche pourquoi ces propriétés "points de départ" entraînent de nouvelles propriétés. Pour ces justifications, on doit avoir tous les mêmes règles du jeu qui sont les théorèmes. A ce niveau, on dispose de tous les théorèmes concernant les parallélogrammes.

A la fin de la 5ème, l'élève doit être capable de maîtriser le langage d'un texte de géométrie afin de :

construire rapidement la figure correspondante.
en extraire les données.
apprendre et retenir définitions et théorèmes.
résoudre quelques démonstrations à un ou deux pas.

Classe de 4ème

De nombreux textes de problèmes se présentent sous la forme d'un programme de construction, d'où l'intérêt du travail effectué en 6ème-5ème.

1) A partir de figures

Quelques programmes de constructions pourront être donnés au début de l'année pour remettre en place le vocabulaire correct, les définitions, les distinctions importantes comme "nombre-ensemble de point". Exemple : moitié-milieu, longueur-segment, etc...

Puis ce type d'exercices pourra être remplacé par des problèmes de construction et de recherche (exemple : "où placer le point D pour que le quadrilatère des milieux soit un carré ?").

On peut demander aux élèves de rédiger le texte d'un problème à partir d'une figure sur laquelle sont marquée conventionnellement les données. Exercice possible (comme en fin 5ème) : on a construit une même figure de plusieurs manières différentes, faire trouver les programmes de constructions correspondants, c'est-à-dire les données du problème dans chaque cas, trouver ce que l'on peut en déduire, c'est-à-dire ce que l'on demande de démontrer (la conclusion). Ceci permet d'arriver à faire la distinction entre "données et conclusions".

2) A partir d'un problème de géométrie

On sera bientôt amené à dépasser ce stade car la donnée n'est pas la copie conforme du programme de construction, mais elle en est souvent une "traduction".

Exemple : Dans le problème :

Dans un triangle ABC, I est le milieu de [BC]. On appelle J le point d'intersection de (AI) et de la parallèle à AB passant par C...

La phrase qui permet de construire J contient des données. Mais celle-ci s'exprime différemment si on veut les isoler du texte, par exemple sous la forme :

JC parallèle à AB.
A, I, J alignés.

C) ECRIRE UN TEXTE COMPLEXE

Les enseignants de français connaissent déjà depuis longtemps la difficulté pour les élèves d'écrire un texte complexe. Sans doute peut-on distinguer en mathématiques comme en français deux niveaux d'intervention : un travail sur les phrases isolées et un travail sur les textes plus complexes.

1 - Un travail sur les phrases isolées

Il est intéressant d'isoler cette tâche pour éviter que toutes les difficultés se présentent en même temps. Parmi les activités que nous présentons, ***"A la recherche du théorème perdu"*** et ***"Et pourquoi pas ... parce que ?"*** vont dans ce sens. On peut imaginer d'autres pistes que nous n'avons pas expérimentées :

- classer des conjectures, des théorèmes, des définitions pour savoir quels sont les énoncés qui veulent dire la même chose.
- faire écrire des énoncés de toute sorte.
- traduire un énoncé d'une forme dans une autre. Par exemple, dans un énoncé de géometrie ajouter ou supprimer les noms des points de la figure.

Notre expérience nous montre que cela peut se faire dès la sixième par exemple à propos des programmes de construction ou des solutions de problèmes.

2 - Travail sur un texte complexe

Pour donner aux élèves, les moyens d'aborder en quatrième dans de bonnes conditions l'écriture de démonstrations, il serait souhaitable dès la sixième de leur faire lire et écrire des textes mathématiques suffisamment complexes. La difficulté est de trouver des tâches réalisables par tous les élèves.

La transformation de textes déjà écrits en est une. Notre travail sur les activités ***"Texte élève, texte prof"*** nous a montré à la fois qu'il est possible de réaliser de telles activités mais qu'il est difficile de les mettre au point. Des exercices de ce type pourraient être conçus pour la quatrième : à partir d'une démonstration très détaillée faire écrire une démonstration très succincte ou faire faire l'exercice inverse.

Voici quelques idées que nous n'avons pas expérimentées :

- Lire des textes pour en extraire des informations (énoncés de problème).
- Travaux de type puzzle.
- Se servir des déductogrammes pour faire apparaître la structure d'un texte de démonstration (cf Egret et Duval [5]).

Si l'on veut que les travaux d'écriture ne soient pas rares il faut laisser aux élèves une certaine liberté d'écriture. Par exemple pour les programmes de construction en sixième il faut accepter des textes dans le style élève (cf activité ***"Texte élève, texte prof"***) du moment qu'ils sont assez précis pour permettre la réalisation de la figure et qu'ils sont compris par les autres élèves. De même avant d'imposer en quatrième de rédiger pour un problème une démonstration, on peut demander aux élèves d'écrire un texte très libre qui donne les idées qui interviennent dans la solution.