UNE STRATEGIE D'ENSEIGNEMENT AVEC LES FIGURES-CLES

Raisonner sur une figure

Tant qu'un élève n'a pas perçu clairement par un travail sur une figure la nature des arguments qui vont lui permettre d'affirmer qu'une propriété est vraie, il nous semble impossible de lui demander de développer ses arguments sous forme de texte. Nous cherchons donc à donner aux élèves des moyens adaptés de travail sur la figure. C'est pour atteindre ce but que nous avons introduit les idées précédentes. La difficulté est de leur donner toute leur efficacité en les engageant **toutes en même temps de manière coordonnée, avec l'objectif d'obtenir des élèves un travail rigoureux de déduction sur une figure.**

- *S'appuyer sur le codage pour raisonner sur les figures :*

Il nous paraissait essentiel de donner aux élèves un moyen simple de raisonner sur la figure sans l'usage d'un langage sophistiqué. Nous avons retenu l'idée très classique du codage : des couleurs[1] sont utilisées pour les parallèles, un petit carré pour les angles droits, des petits traits pour les égalités de longueurs et pour les égalités d'angles. Notons que pour les parallèles, on rencontre plus souvent, dans la pratique de résolution de problème au début de la Quatrième, des segments parallèles que des droites parallèles. Pour l'alignement, si on sait que trois points sont alignés, on colorie la droite qui les contient, en utilisant des couleurs différentes pour des directions différentes.

Ce codage va jouer plusieurs rôles :

- Traduire les propriétés d'un énoncé de théorème

  Nous avons déjà utilisé le codage pour construire les trois figures associées à un énoncé : la figure-clé et les figures représentant les prémisses et la conclusion.

- Traduire les données d'un problème

  Le codage permet de traduire les données de l'énoncé d'un problème sur la figure. II nécessite une lecture attentive du texte de l'énoncé. Parfois une donnée de l'énoncé doit être traduite en propriétés codables : symétrique, parallélogramme, milieu, etc.

  La pratique qui consiste à réécrire les données d'un énoncé sous forme de phrases ou encore en style télégraphique est, en comparaison, moins performante, car les élèves peuvent s'acquitter de cette tâche en s'appuyant sur des repères superficiels : on trouve un morceau de phrase, on le recopie en remplaçant éventuellement quelques mots par des symboles.

- Raisonner sur la figure

  Son troisième rôle, dans notre démarche, est de permettre un raisonnement sur la figure. Sur une figure où les données d'un problème sont déjà codées, on recherche des figures-clés ; on ajoute alors les codages correspondant à la conclusion du théorème concerné ; il est parfois nécessaire d'ajouter des éléments à la figure pour le faire.

- *Revoir les propriétés vues les années précédentes en particulier celles du parallélogramme.*

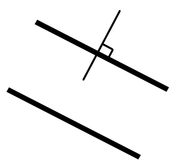
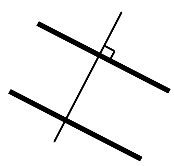
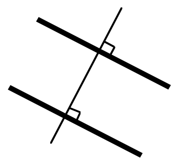
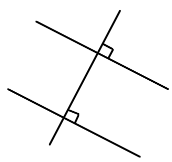
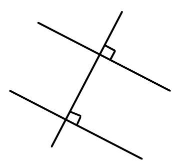
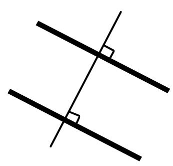
L'introduction des figures-clés peut se faire naturellement, au début de l'année de Quatrième, à l'occasion d'une révision, durant une à deux semaines, des propriétés et théorèmes rencontrés en géométrie en Sixième et en Cinquième. Comme nous l'avons expliqué dans le premier paragraphe, à certains énoncés sont associées d'une part deux figures représentant les

---

[1] Dans ce séminaire les couleurs sont remplacées par des nuances de grisés (contraintes d'impression)

données et les conclusions, d'autre part une ou plusieurs figures-clés. Notons que tous les énoncés ne sont pas concernés. Par exemple les définitions des quadrilatères singuliers ainsi que leurs propriétés ne le sont pas, car ils ne posent aucune difficulté pour la plupart des élèves.

A la fin de cette révision, toutes ces informations sont résumées sur une fiche « outil », où figurent les énoncés, les figures-clés associées et ce qu'elles permettent de démontrer. Elle est élaborée au fur et à mesure par le professeur avec parfois l'aide des élèves ; ceux-ci sont chargés de remplir certaines cases et s'approprient ainsi les liens entre énoncé, figure-clé, prémisses et conclusion du théorème. Voici une possibilité de présentation de cette fiche en cours d'élaboration.

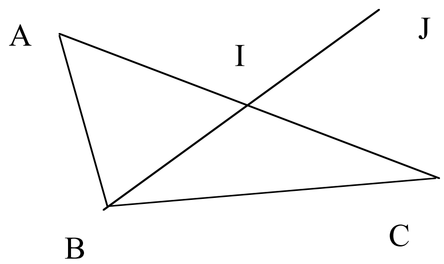
Figures-clés	Propriétés	Pour démontrer :
	Si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre. Si  alors 	qu'un angle est droit.
	Si deux droites sont perpendiculaires à la même, alors elles sont parallèles entre elles. Si  alors 	que des droites sont parallèles.
	Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles, alors c'est un parallélogramme Si alors	
	Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme. Si alors	
	Si un quadrilatère non croisé a deux côtés opposés parallèles et de même mesure alors c'est un parallélogramme Si alors	
	Si un quadrilatère a ses côtés opposés de même mesure alors c'est un	

	parallélogramme. Si alors	

- *Choisir d'emblée des situations significatives*

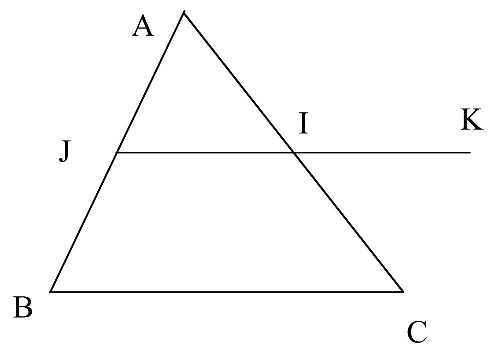
Dans beaucoup de manuels, la stratégie adoptée pour l'apprentissage de la démonstration propose de débuter par l'étude de situations très simples. Or il est évident que la déduction ne présente pas d'intérêt quand une figure est si simple que toutes les propriétés sont évidentes. Par exemple la situation suivante, qui se réduit pratiquement à une figure-clé, ne peut donner aucune motivation à un élève de développer une argumentation.

Soit ABC un triangle, I milieu de [A,C], J le symétrique de B par rapport à I. Montrer que AJCB est un parallélogramme.



Notre stratégie nous permet de démarrer les « raisonnements » sur une figure avec des situations pour lesquelles le repérage de la figure-clé est un véritable travail. Aussitôt après la révision et la mise en évidence des figures-clés, nous proposons par exemple aux élèves, **comme premier problème à résoudre**, le problème suivant qui est d'ailleurs la propriété du cours « Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un deuxième côté alors elle coupe le troisième en son milieu. »

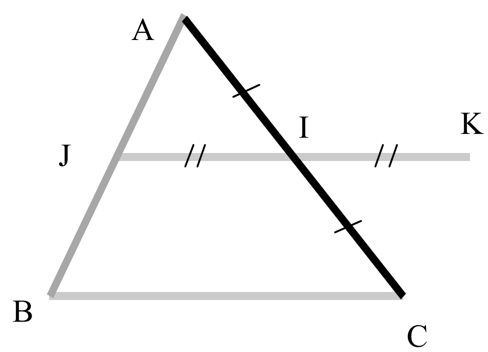
ABC est un triangle quelconque, I est le milieu de [AC], on trace la parallèle à (BC) passant par I, elle coupe [AB] en J. On veut montrer que J est le milieu de [AB].
Pour cela, on utilise K symétrique de J par rapport à I.



Ce problème peut être résolu à l'aide des propriétés du parallélogramme que nous venons de revoir. Pour l'élève, la première étape est de coder la figure à partir des données et de rechercher une figure-clé.

Il peut alors détecter une première figure-clé.

Au début il est important de demander à l'élève de l'extraire de la figure en nommant les extrémités des segments qui interviennent ; le professeur peut vite se rendre compte que ce



n'est pas évident pour tous.

On lui associe alors la propriété correspondante, soit sous forme de texte, soit sous forme de schéma, et la figure peut alors s'enrichir de nouvelles propriétés.

Pour la deuxième étape, le professeur a prévu une deuxième figure enrichie des codages correspondants, car les nouvelles conclusions servent de données pour la nouvelle recherche et donc changent de statut.

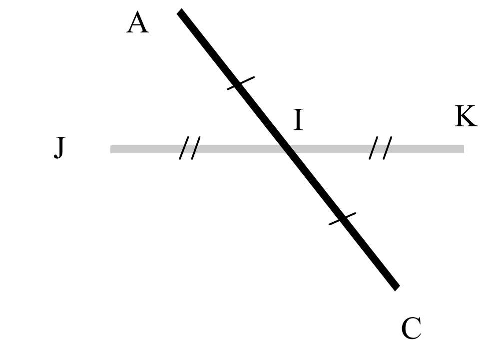
A ce stade, si un élève a omis de coder l'alignement B, J, A en donnant une couleur à la droite (AB), il peut arriver qu'il code seulement le parallélisme des segments [AJ] et [KC] au lieu de coder le parallélisme des droites (AJ) et (KC) ; il hésite à prolonger la couleur utilisée pour le côté [AJ] à la droite (AB). C'est une véritable difficulté. Le codage de l'alignement est une aide précieuse pour la surmonter.

Il faut maintenant rechercher une seconde figure-clé. On extrait cette figure, en nommant les sommets du quadrilatère.

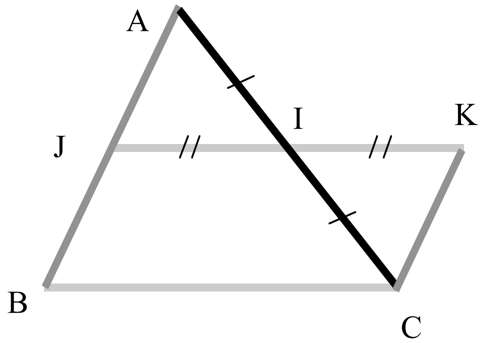
De nouveau on demande à l'élève de lui associer la propriété correspondante.

Avec AJ = JB et A, J, B alignés, il peut alors conclure que J est le milieu de [AB].

Lorsque l'élève a fait tout ce travail, il est en mesure d'écrire les étapes de son raisonnement.



Première figure-clé



Nouvelle figure codée

Deuxième figure-clé

Écrire une démonstration

Pour qu'un élève joue vraiment le jeu d'écrire une démonstration, il faut que celle-ci soit, à ses yeux, un véritable texte qui ait pour objectif d'expliquer de manière précise ce qu'il a fait sur la figure et non un exercice d'imitation d'un texte satisfaisant à un canon. Voici les moyens mis en oeuvre pour atteindre ce but :

- *Attendre que le problème soit résolu avant d'aborder l'écriture d'un texte*

Bien sûr pour un mathématicien expérimenté, et sans doute aussi pour des élèves en fin de scolarité, l'écriture d'une ébauche de démonstration est l'un des moyens de résoudre un problème de type « montrer que ». Mais ce n'est évidemment pas le cas pour un débutant[2]. Une démonstration est un texte qui doit respecter des contraintes qui, pour beaucoup d'élèves n'ont rien de naturelles. Elles ne deviennent familières et acceptables qu'après une assez longue pratique. Il est donc nécessaire, avant qu'un élève puisse se lancer dans l'écriture d'un texte qui explique ses déductions, que celles-ci soient déjà claires pour lui.

[2]Raymond Duval avait déjà souligné cette idée dans [5] et J. Houdebine dans [11].

C’est pourquoi, dans la première étape, le travail se fait entièrement sur la figure sans contrainte d’écriture de texte ; pour la deuxième étape, un texte très libre, dans l’esprit des narrations de recherche[3], est demandé à l’occasion d’une situation non évidente et après que la solution ait été trouvée sur la figure. Et enfin pendant la troisième étape, des contraintes du type : *citer les théorèmes concernés au cours de la déduction* sont imposées au texte. Le cas présenté dans l'annexe 1, *Partir de la conclusion*, illustre bien ces trois étapes.

- *Travailler à partir des textes des élèves*

Un des points importants de notre démarche est de faire travailler les élèves sur des textes produits par eux. Par exemple, à l’occasion d’une correction, un élève lit son texte, tout le monde écoute et le professeur désigne un autre élève qui est chargé de lui mettre une note entre 0 et 10 en argumentant. Les autres élèves s’ils ne sont pas d’accord interviennent alors ; puis le professeur donne son avis. Ou encore nous demandons aux élèves, dans un travail de groupe, d’améliorer chacun des textes produits par les membres du groupe ; comme les rôles tournent, chaque élève accepte assez volontiers de reprendre son texte avec le regard des autres ; il est amené à développer ses arguments. Les textes de l’annexe 3, *Des copies à ne pas rejeter*, peuvent faire l’objet d’un tel travail.

Pour éviter d’imposer aux élèves des stéréotypes, nous ne donnons pas, a priori, le texte du professeur. A chaque fois que cela est possible, nous proposons comme corrigé d’une démonstration une ou plusieurs copies d’élèves (cf. annexe 2 : *Des copies d’élèves qui servent de corrigé*).

L’avantage de cette démarche est multiple :

- des textes variés vont être proposés par les élèves et l’étude de ceux-ci leur permet de mieux comprendre les véritables contraintes imposées aux textes de démonstration ; la plupart du temps, chacune des fautes ou des maladresses d’un texte est repérée par au moins un élève.
- l’attention des élèves est bien plus grande lorsqu’il s’agit d’étudier un texte produit par un autre élève que lorsqu’il s’agit d’étudier une démonstration de l’enseignant. Il est plus intéressant d’argumenter sur la qualité d’un tel texte que de s’attarder sur un « truc » qui est forcément bon.
- Plus les textes sont variés, plus l’élève pourra par la suite, au cours de sa scolarité, s’adapter à d’autres types de démonstrations.
- Plus fondamentalement cela donne aux élèves l’occasion de réécrire. Écrire est une démarche[4] complexe. Et cette démarche comporte comme une étape essentielle la reprise d’un texte déjà écrit pour le modifier et lui donner toute sa force.

- *Comprendre les textes des élèves*

Ce qui importe c’est que l’élève commence à écrire et que cela ait du sens pour lui. Les premiers textes qu’il va produire vont être le plus souvent très différents de ce qu’attend l’enseignant. Par exemple, dans notre démarche, l’aspect descendant (on part des données et on va vers la conclusion) est privilégié ; or certains élèves vont choisir de partir de la conclusion. D’autres vont faire des allers et retours entre ce qu’ils savent démontrer et la question qui est posée ; ils écrivent à partir de ce qui les a mis sur la voie. Le travail du professeur n’est pas alors d’imposer à l’élève un texte standard ; il est de **rechercher dans le texte de l’élève des « ingrédients » utiles**, de tenter d’y retrouver la démarche sous-jacente et d’aider l’élève à améliorer son texte (cf. annexe 3 : *Des copies à ne pas rejeter*).

[3] Voir [1] ou [16].
[4] Voir par exemple [1], p. 183.

Dans la pratique cela suppose que le professeur relève beaucoup de textes d'élèves pour pouvoir suivre au mieux chaque élève. Il nous paraît important de les évaluer explicitement, même si cette évaluation n'est pas prise en compte dans les notations définitives, car c'est un moyen essentiel pour l'élève de savoir s'il progresse dans le sens des objectifs choisis et pour l'enseignant de repérer la manière dont l'élève a perçu le contrat. La logique qui se dégage des textes de l'élève nous permet de savoir s'il utilise l'outil proposé ou si c'est pour lui une gêne ; par exemple, s'il raisonne à partir de la question il faudra qu'il utilise les schémas de propriété à l'envers (cf. annexe 1 : *Partir de la conclusion*).