FIGURES ET DEMONSTRATIONS EN QUATRIEME

Marie-Paule KERBOEUF & Jean HOUDEBINE
IREM de Rennes - DidmaR

Il y a quelques années, comme Marie-Paule se heurtait à des difficultés avec quelques élèves de Quatrième en soutien pour leur faire comprendre le contrat de la démonstration, elle eut l'idée de proposer à ces élèves ce que nous appellerons des *figures-clés*. Elle s'appuyait sur ses travaux antérieurs à l'IREM et sur ses lectures. Devant le succès obtenu, elle reprit cette idée l'année suivante avec une classe de Quatrième assez en difficulté. Depuis elle l'inclut fortement dans sa pratique et la perfectionne.

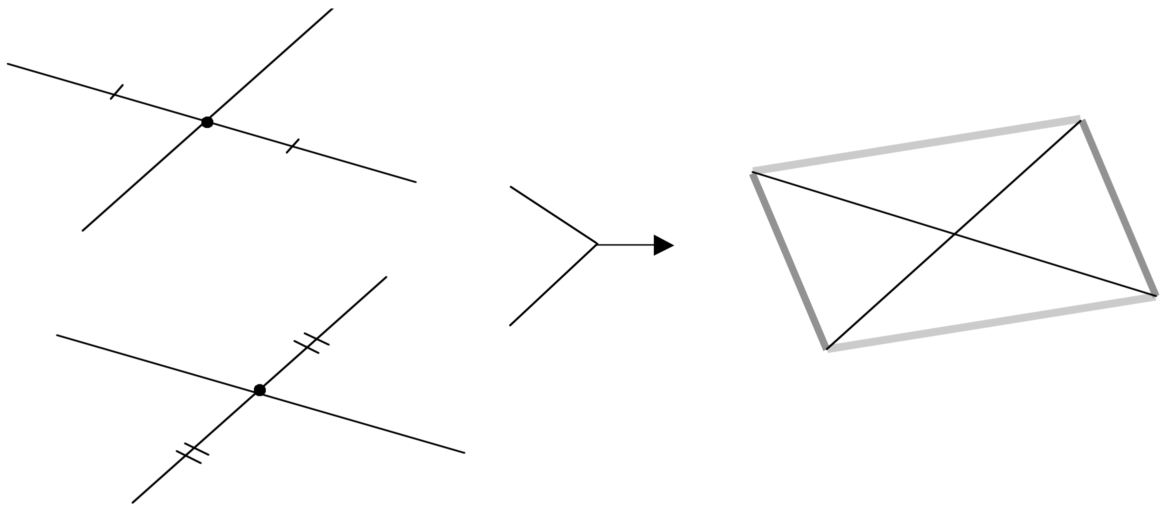
Nous travaillons ensemble depuis 9 mois. Ce travail a été très fructueux car il a permis de mieux comprendre l'originalité de sa démarche, les raisons des succès obtenus et donc d'envisager des améliorations pour l'avenir. Il nous a renforcés dans l'idée qu'il était utile d'en faire part aux collègues[1].

L'IDEE DE FIGURE-CLE

Quelques références

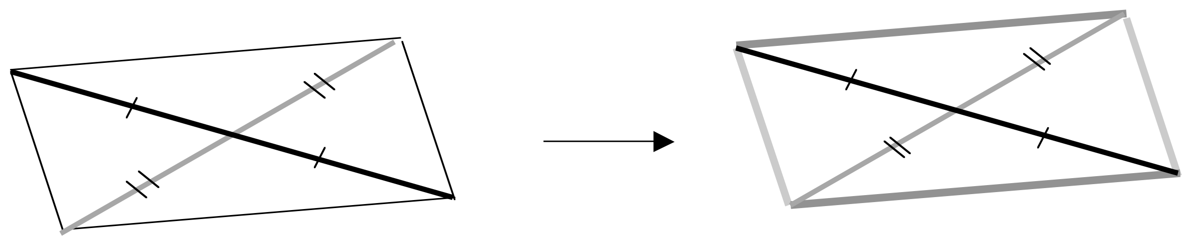
- *Un schéma contesté*

Le point de départ de notre travail a été une discussion sur le schéma ci-dessous que Jean citait dans [12] comme pouvant être utilement associé au théorème : *un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme*.



Nous sommes alors assez facilement tombés d'accord pour lui préférer le schéma ci-dessous où les hypothèses ne sont pas représentées par deux figures mais par une seule et où la figure servant à présenter la conclusion contient encore les hypothèses.

[1] Voir aussi [19]



Le premier schéma était proposé initialement, dans les années 1988-90, par une équipe composée de M.-A. Egret, D. Guin, G. Kuntz, G. Métivier, N. Vogel et R. Duval. Cette équipe travaillait sur l'enseignement de la démonstration avec en particulier en perspective l'étude ou la réalisation de logiciels d'enseignement. Elle va produire plusieurs articles[2] qui explicitent le cadre dans lequel ce schéma est introduit.

Une première idée est de distinguer les connaissances en trois catégories :

- Connaissances heuristiques : celles qui servent à résoudre un problème.
- Connaissances procédurales : celles qui consistent à savoir appliquer correctement un théorème.
- Connaissances sur l'organisation déductive de la démonstration : les réseaux sémantiques sont l'un des moyens de les atteindre.

Quatre idées importantes orientent la stratégie d'apprentissage :

- Associer à un énoncé de théorème un schéma composé de figures ; c'est pour cela que le schéma précédent est introduit,
- Introduire les réseaux sémantiques comme un objet transitionnel,
- Séparer résolution de problème et rédaction d'une démonstration,
- Considérer certaines figures prototypes qui font partie des connaissances heuristiques.

Notre travail sur les figures-clés nous conduit alors à deux remarques :

1 - Le choix des figures

Les schémas associés aux énoncés de théorèmes sont introduits dans le chapitre connaissances procédurales. Cela explique la forme du schéma choisi par l'équipe de Strasbourg puisqu'il s'agit de favoriser la démarche : *je vérifie que chacune des hypothèses est bien satisfaite et j'en déduis la conclusion*. Dans le chapitre connaissances heuristiques, les figures qui servent à décrire les hypothèses sont citées de nouveau, mais cette fois comme des figures prototypes, en l'occurrence des figures qui aident, dans la résolution d'un problème, à trouver des sous-figures permettant l'application d'un théorème, soit en reconnaissant des hypothèses, soit en reconnaissant une conclusion.

Il nous semble que le schéma précédent n'est vraiment adéquat pour aucune de ces deux idées :

- Choisir de présenter, dans l'hypothèse, deux sous-figures distinctes correspond mal à l'idée de figure prototype. En effet, pour appliquer les hypothèses, il ne s'agit pas de trouver deux sous-figures mais une seule. La séparation proposée correspond sans doute à

[2] En particulier [4], [5], [6], [7], [8] et [9].

une idée implicite de l'équipe de Strasbourg : présenter l'organisation d'un énoncé en termes de plusieurs prémisses et d'une conclusion.

- Choisir de ne pas présenter les données sur la figure conclusion ne correspond pas à la connaissance procédurale utile puisque la procédure consiste à ajouter sur la figure les propriétés contenues dans la conclusion aux faits déjà connus.

2 - Des pratiques peu explicites

Les pratiques décrites dans les articles initiaux sont loin d'être clairement explicitées. Par exemple, si des succès évidents, attestés par des extraits de copies, sont décrits par M.-A. Egret et R. Duval dans [8], il est difficile en lisant cet article de savoir quelle est la pratique qui conduit à ces succès. Le schéma précédent est cité explicitement par M.-A. Egret dans [6], mais, là encore, il est difficile de se faire une idée de l'efficacité de ce schéma. Des années plus tard, Martine Lewillion et Nicole Bellard [2] reprennent le flambeau sans doute avec l'appui de Dominique Guin. La démarche est décrite de manière plus précise ; elles proposent des activités explicites et donnent des comptes rendus détaillés d'expérimentation. Elles indiquent dans quels contextes des schémas sont associés aux théorèmes : à l'occasion de la révision des résultats connus en Sixième et Cinquième et aussi pour des théorèmes comme Pythagore. En revanche les arguments qui guident cette démarche sont moins clairs que ceux développés par M.-A. Egret et R. Duval. Aucune explication n'est donnée sur ce qui pourrait expliquer certains choix comme, .par exemple, le fait que les figures soient dessinées à main levée ou la variété des schémas proposés (ils peuvent présenter les prémisses sur la même figure ou sur deux figures différentes, ils peuvent présenter ou non les prémisses sur la figure qui présente la conclusion). Elles aussi obtiennent un certain succès ; cependant la conclusion de leur article indique que la distinction entre un théorème et sa réciproque reste problématique.

- *Les figures prototypes*

D'autres auteurs parlent de figures prototypes : il s'agit de figures qui font partie de la connaissance d'un élève et dont il se sert dans son activité mathématique. Ce sont souvent les difficultés liées à ces figures qui sont explicitées : par exemple Noirfalise parle de figures prégnantes [14] dans une expérience où l'on voit les élèves qui, après la lecture de la description d'une figure, font une figure inadaptée ; ces élèves semblent choisir une figure dans le lot de celles qu'ils connaissent, en utilisant quelques indices, plutôt que de construire la bonne figure.

Dans un autre article [15], Noirfalise souligne le changement important de statut des figures prototypes quand on passe de l'observation des figures à la démarche démonstrative.

Plutôt que de parler de figure prototype, F. Cordier et J. Cordier [3] préfèrent étudier la « typicalité » des figures habituellement associées au théorème de Thalès. Ils essaient de dégager des caractéristiques de ces figures qui jouent un rôle dans l'association par les élèves de chacune de ces figures à ce théorème. Ils constatent que certaines de ces caractéristiques jouent un rôle important : par exemple, des figures avec des parallèles non horizontales sont ressenties par les élèves comme « non-typiques » du théorème de Thalès. Cette non-typicité engendre parfois un plus grand nombre d'erreurs mais ce n'est pas toujours le cas.

On trouve le mot figure-clé dans certains ouvrages, comme [10]. Mais dans le même ouvrage le statut des différentes figures-clés peut être différent : elles peuvent, comme dans notre travail, être associées aux prémisses d'un énoncé d'un théorème ; elles peuvent jouer simplement le rôle de figure prototype (configuration de Thalès).

- *Le logiciel DEFI et l'exploration de la figure*

Giorgiutti a mis au point un logiciel d'apprentissage de la démonstration qui comporte deux composantes : une aide à la construction de pas de démonstration et une aide à « l'exploration de la figure ». Dans cette dernière, on demandait en particulier, par des questions du type : « Existe-t-il un parallèlogramme dont les sommets appartiennent à (QM) et à (NP) ? » de rechercher certaines sous-figures ayant une propriété utile pour la résolution du problème. L'expérimentation de ce logiciel nous a beaucoup appris sur le comportement des élèves vis à vis de ce type de modalités d'étude de la figure associée à un problème[3] ; il est certain que les discussions autour de ce logiciel ont été un élément décisif dans la mise au point de ce qui suit.

Définition de figure-clé

Cette expression a été souvent employée dans le sens de figure prototype. Dans cet exposé nous allons lui donner un sens beaucoup plus précis. Il s'agit d'associer à un énoncé de théorème **une figure avec codage correspondant aux hypothèses contenues dans cet énoncé, mais avec des tracés minima**. En effet, pour raisonner sur la figure, le point essentiel est de reconnaître qu'une partie de cette figure vérifie les hypothèses de l'énoncé d'un théorème. C'est la raison d'être de la figure-clé. Pour appliquer le théorème sur la figure il suffit de trouver une sous-figure qui soit la figure-clé. L'application du théorème devient alors simple. Notons que cette idée de tracés minima dépend du système de codage choisi : par exemple si nous codons les égalités de longueurs par de petits traits sur les segments, ces segments devront faire partie des tracés minima.

Cette définition ne suffit pas à déterminer entièrement la figure-clé associée à un théorème ; nous le verrons de manière évidente ci-dessous à propos de la médiatrice. Deux cas se sont présentés dans la pratique :

- ou bien Marie-Paule estime que toutes les figures-clés possibles sont ressenties par les élèves comme faisant partie de la même « classe de figures ». Dans ce cas l'idée est de choisir une figure représentative de cette classe, c'est-à-dire ne possédant pas de propriété qui pourrait évoquer une sous-classe : par exemple dans le cas du parallélogramme la figure-clé choisie ne sera pas un rectangle.
- ou bien, Marie-Paule pense que ce n'est pas le cas. Elle propose alors plusieurs figures-clés correspondant à chacune des classes de figures qu'elle pense avoir repérées.

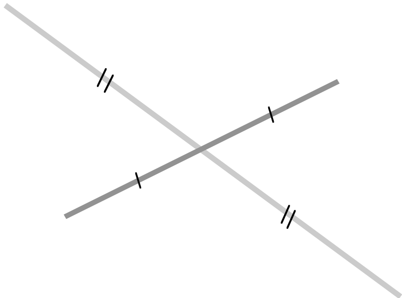
On voit qu'ici un travail de recherche serait nécessaire, pour préciser cette idée de classes de figures, pour déterminer les différentes classes associées à un théorème, pour expliciter les caractéristiques qui jouent un rôle dans la typicité d'une figure comme représentant d'une classe et pour étudier auprès des élèves l'effet de ces caractéristiques. Cette recherche pourrait s'inspirer du travail de F. Cordier et J. Cordier [15] à propos du théorème de Thalès.

Quelques exemples

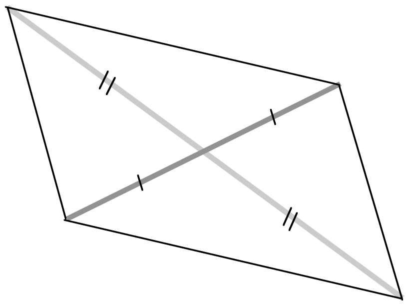
- *Premier exemple : les diagonales se coupent en leur milieu*

Pour l'énoncé : **Si** les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu **alors** ce quadrilatère est un parallélogramme, la figure-clé retenue est :

[3] Cf [12] p. 185-192 ou [18]



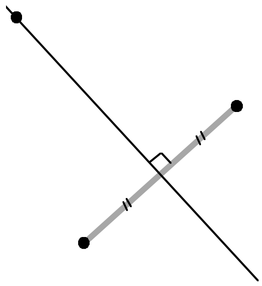
Nous ne considérons pas la figure suivante comme une figure-clé : elle ne correspond pas aux tracés minima. Elle ne serait pas efficace pour appliquer le théorème précédent sur une figure où les côtés du parallélogramme ne sont pas déjà tracés.



Notons qu'un élève hésite au début à parler d'un quadrilatère dont les côtés ne sont pas tracés : la figure-clé proposée ici peut l'y aider.

- *Deuxième exemple : la médiatrice d'un segment, plusieurs figures-clés*

Considérons la propriété : « Si un point est situé sur la médiatrice d'un segment alors il est équidistant des extrémités de ce segment ». On peut lui associer la figure-clé suivante :



Considérons maintenant le théorème : « La droite qui joint deux points équidistants des extrémités d'un segment est la médiatrice de ce segment. »

On sait que l'application de ce théorème est rendue difficile par l'existence de « configurations » ressenties comme franchement différentes ; en particulier la disposition avec les deux points du même côté du segment est difficile à repérer dans une figure. C'est la raison qui nous fait choisir ici trois figures-clés plutôt qu'une. Voici ces figures[4] :

[4] Ce théorème s'appliquant dans des situations où la médiatrice n'est pas « verticale », nous ne disposons pas la médiatrice verticalement sur les figures associées à cet énoncé.

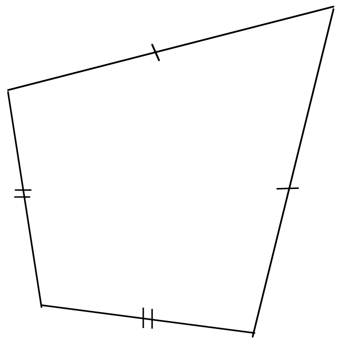


Figure-clé n°1

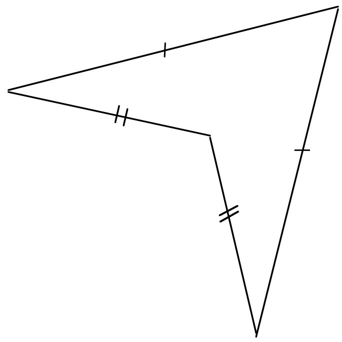


Figure-clé n°2

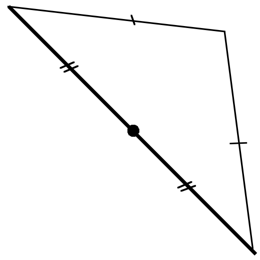


Figure-clé n°3

La figure-clé n°3 correspond au cas où l'un des points est sur le segment. Même s'il s'agit d'un cas particulier du théorème ci-dessus, cette figure est plutôt proche d'énoncés qui s'expriment en termes de triangle isocèle comme : « Dans un triangle isocèle, la médiane est aussi hauteur et médiatrice ».

On voit sur ces exemples qu'un théorème peut être associé à plusieurs figures-clés et qu'une figure-clé peut être associée à plusieurs théorèmes.

Ces figures illustrent encore l'intérêt de ne garder pour une figure que les tracés minima : ici ni le segment, ni la médiatrice ne sont tracés. Cet outil prend tout son sens pour des problèmes comme celui présenté dans l'encadré ci-contre *L'efficacité des figures-clés* (surtout si l'on n'a pas de connaissances sur le cercle circonscrit).

- *Troisième exemple : des points sur un même cercle*

Nous proposons aux élèves les figures-clés suivantes :

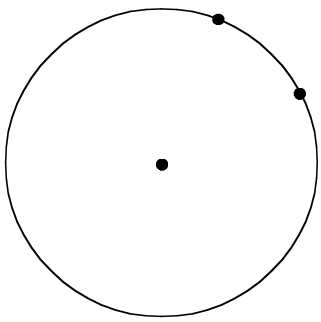


Figure-clé n°1

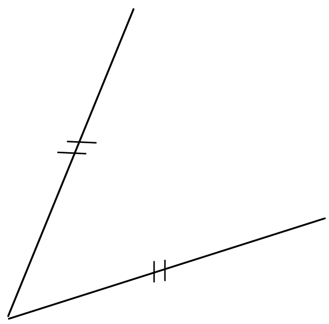


Figure-clé n°2

La figure-clé n°1 est associée à la définition du cercle comme ensemble de points situés à égale distance d'un point donné. A et B étant deux points d'un cercle de centre O, si les rayons OA et OB ne sont pas tracés, il n'est pas toujours évident pour un élève de 4ème d'écrire l'égalité entre OA et OB. Les rayons peuvent aussi être coupés par d'autres segments, gênant la vision de cette égalité.

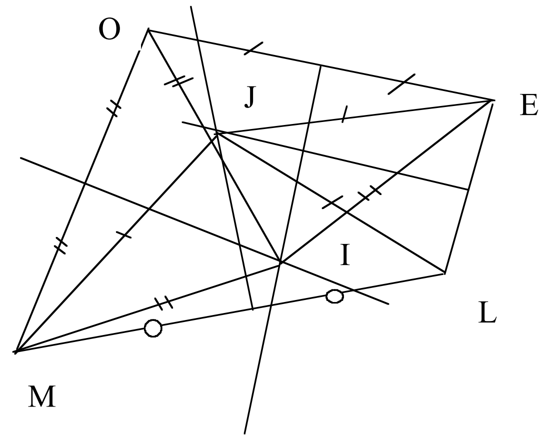
La figure-clé n°2 peut être associée à plusieurs propriétés :

- Si un point est équidistant des extrémités d'un segment, alors il est sur la médiatrice de ce segment,
- Si un triangle a deux côtés de même mesure, alors il est isocèle,

L'EFFICACITE DES FIGURES-CLES

<table>
<tr><th>Énoncé[5]</th><th>Copie d'élève[6]</th></tr>
<tr><td>Tracer un quadrilatère OELM. Tracer les médiatrices des segments [OM] et [OE] : elles se coupent en I.

Tracer les médiatrices des segments [ML] et [LE] : elles se coupent en J.

Prouver que la droite (IJ) est la médiatrice du segment [ME].</td><td>
IE = IO
IO = IM
Donc
IM = IE *donc I est sur la médiatrice de* ME.

JE = JL
JL = JM donc
JM = JE
J est donc sur la médiatrice de ME.
[IJ]est donc la médiatrice de ME.</td></tr>
</table>

Ce problème est le premier que fait cet élève, après l'introduction des médiatrices et des figures-clés associées. Celles-ci semblent être un moteur pour son action : il trace en effet sans hésitation les segments [IO], [IE] et [IM], puis code leur égalité de deux petits traits et il fait de même pour J. Il lui faudra très peu de temps pour s'exclamer « ah, ça y est ! » ; on peut penser que la figure-clé EJMI lui a sauté aux yeux. Il maîtrise de manière spectaculaire la complexité de la figure.

Il produit alors un texte minimaliste qu'on peut interpréter comme le décryptage des figures-clés rencontrées. Visiblement il ne comprend pas la nécessité de citer les propriétés sur lesquelles il s'appuie. Un travail important reste à faire.

[5] Cet énoncé est extrait du Hachette de Quatrième, Édition 98, p. 144, n°10.

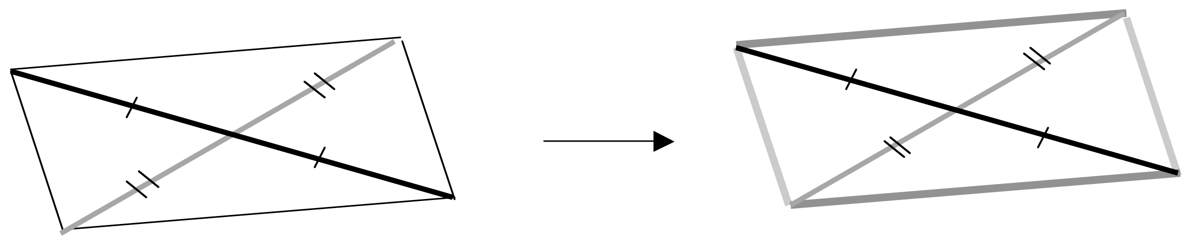
[6] Pour des raisons de lisibilité les copies ont été dactylographiées.

- Si deux points sont à égale distance d'un même point O, alors ils sont sur un même cercle de centre O.

Une idée nouvelle : associer à un théorème une figure-clé et un schéma

Comme dans les travaux dont nous avons parlé ci-dessus, nous sommes partis de l'idée qu'il était utile d'associer à un énoncé des figures. Mais notre proposition diffère de ce qui précède sur des points essentiels. Nous proposons d'abord d'associer à un énoncé deux éléments. Décrivons-les à propos de l'énoncé : « Un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme » :

- D'une part une figure-clé comme nous l'avons indiqué ci-dessus.
- D'autre part le schéma suivant :



Dans ce schéma les deux figures choisies sont autant que possible très près du texte de l'énoncé ; deux énoncés différents du même théorème peuvent donc conduire à deux représentations différentes. Sur la première figure, qui n'est jamais décomposée comme dans la proposition de Marie-Agnès Egret, tout ce qui est évoqué dans l'énoncé est tracé et les données de l'énoncé sont codées ; pour obtenir la deuxième figure on enrichit la première pour y coder les propriétés contenues dans la conclusion. Dans le cas de ce théorème, un point important est que la conclusion ne peut être raisonnablement codée directement : ce sont donc les propriétés du parallélogramme que l'on codera sur la deuxième figure. Ici encore, les contraintes que nous mettons sur les figures de ce schéma laissent beaucoup de choix à l'enseignant.

Dans notre stratégie, l'illustration de l'énoncé par le schéma a pour but de donner plus de signification à l'énoncé et non d'insister sur sa structure syntaxique. Nous pensons en effet qu'à ce stade c'est le texte qui est le meilleur soutien pour dégager la structure syntaxique. C'est un nouvel argument pour ne pas décomposer la première figure du schéma.

C'est la figure-clé qui met les prémisses en évidence. **C'est le travail de résolution de problème avec la figure-clé et les liens figure-clé, schéma et énoncé qui permettent peu à peu de découvrir la signification de l'énoncé et par conséquent de prendre conscience du rôle joué par sa structure syntaxique.**

UNE STRATEGIE D'ENSEIGNEMENT AVEC LES FIGURES-CLES

Raisonner sur une figure

Tant qu'un élève n'a pas perçu clairement par un travail sur une figure la nature des arguments qui vont lui permettre d'affirmer qu'une propriété est vraie, il nous semble impossible de lui demander de développer ses arguments sous forme de texte. Nous cherchons donc à donner aux élèves des moyens adaptés de travail sur la figure. C'est pour atteindre ce but que nous avons introduit les idées précédentes. La difficulté est de leur donner toute leur efficacité en les engageant **toutes en même temps de manière coordonnée, avec l'objectif d'obtenir des élèves un travail rigoureux de déduction sur une figure.**

- *S'appuyer sur le codage pour raisonner sur les figures :*

Il nous paraissait essentiel de donner aux élèves un moyen simple de raisonner sur la figure sans l'usage d'un langage sophistiqué. Nous avons retenu l'idée très classique du codage : des couleurs[7] sont utilisées pour les parallèles, un petit carré pour les angles droits, des petits traits pour les égalités de longueurs et pour les égalités d'angles. Notons que pour les parallèles, on rencontre plus souvent, dans la pratique de résolution de problème au début de la Quatrième, des segments parallèles que des droites parallèles. Pour l'alignement, si on sait que trois points sont alignés, on colorie la droite qui les contient, en utilisant des couleurs différentes pour des directions différentes.

Ce codage va jouer plusieurs rôles :

- Traduire les propriétés d'un énoncé de théorème

  Nous avons déjà utilisé le codage pour construire les trois figures associées à un énoncé : la figure-clé et les figures représentant les prémisses et la conclusion.

- Traduire les données d'un problème

  Le codage permet de traduire les données de l'énoncé d'un problème sur la figure. II nécessite une lecture attentive du texte de l'énoncé. Parfois une donnée de l'énoncé doit être traduite en propriétés codables : symétrique, parallélogramme, milieu, etc.

  La pratique qui consiste à réécrire les données d'un énoncé sous forme de phrases ou encore en style télégraphique est, en comparaison, moins performante, car les élèves peuvent s'acquitter de cette tâche en s'appuyant sur des repères superficiels : on trouve un morceau de phrase, on le recopie en remplaçant éventuellement quelques mots par des symboles.

- Raisonner sur la figure

  Son troisième rôle, dans notre démarche, est de permettre un raisonnement sur la figure. Sur une figure où les données d'un problème sont déjà codées, on recherche des figures-clés ; on ajoute alors les codages correspondant à la conclusion du théorème concerné ; il est parfois nécessaire d'ajouter des éléments à la figure pour le faire.

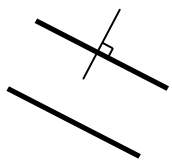
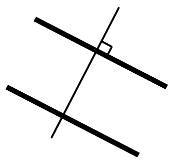
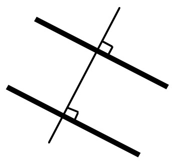
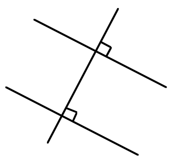
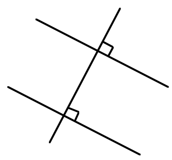
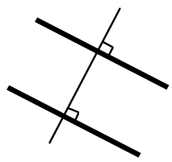
- *Revoir les propriétés vues les années précédentes en particulier celles du parallélogramme.*

L'introduction des figures-clés peut se faire naturellement, au début de l'année de Quatrième, à l'occasion d'une révision, durant une à deux semaines, des propriétés et théorèmes rencontrés en géométrie en Sixième et en Cinquième. Comme nous l'avons expliqué dans le premier paragraphe, à certains énoncés sont associées d'une part deux figures représentant les données et les conclusions, d'autre part une ou plusieurs figures-clés. Notons que tous les énoncés ne sont pas concernés. Par exemple les définitions des quadrilatères singuliers ainsi que leurs propriétés ne le sont pas, car ils ne posent aucune difficulté pour la plupart des élèves.

A la fin de cette révision, toutes ces informations sont résumées sur une fiche « outil », où figurent les énoncés, les figures-clés associées et ce qu'elles permettent de démontrer. Elle est élaborée au fur et à mesure par le professeur avec parfois l'aide des élèves ; ceux-ci sont chargés de remplir certaines cases et s'approprient ainsi les liens entre énoncé, figure-clé,

[7] Dans ce séminaire les couleurs sont remplacées par des nuances de grisés (contraintes d'impression)

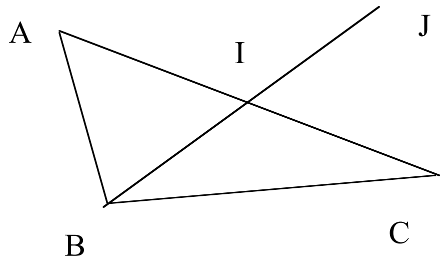
prémisses et conclusion du théorème. Voici une possibilité de présentation de cette fiche en cours d'élaboration.

Figures-clés	Propriétés	Pour démontrer :
	Si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre. Si  alors 	qu'un angle est droit.
	Si deux droites sont perpendiculaires à la même, alors elles sont parallèles entre elles. Si  alors 	que des droites sont parallèles.
	Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles, alors c'est un parallélogramme Si alors	
	Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme. Si alors	
	Si un quadrilatère non croisé a deux côtés opposés parallèles et de même mesure alors c'est un parallélogramme Si alors	
	Si un quadrilatère a ses côtés opposés de même mesure alors c'est un parallélogramme. Si alors	

- *Choisir d'emblée des situations significatives*

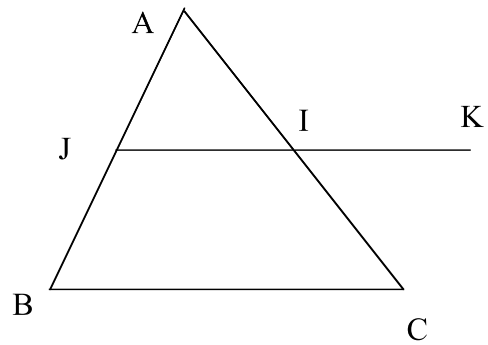
Dans beaucoup de manuels, la stratégie adoptée pour l'apprentissage de la démonstration propose de débuter par l'étude de situations très simples. Or il est évident que la déduction ne présente pas d'intérêt quand une figure est si simple que toutes les propriétés sont évidentes. Par exemple la situation suivante, qui se réduit pratiquement à une figure-clé, ne peut donner aucune motivation à un élève de développer une argumentation.

Soit ABC un triangle, I milieu de [A,C], J le symétrique de B par rapport à I. Montrer que AJCB est un parallélogramme.



Notre stratégie nous permet de démarrer les « raisonnements » sur une figure avec des situations pour lesquelles le repérage de la figure-clé est un véritable travail. Aussitôt après la révision et la mise en évidence des figures-clés, nous proposons par exemple aux élèves, **comme premier problème à résoudre**, le problème suivant qui est d'ailleurs la propriété du cours « Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un deuxième côté alors elle coupe le troisième en son milieu. »

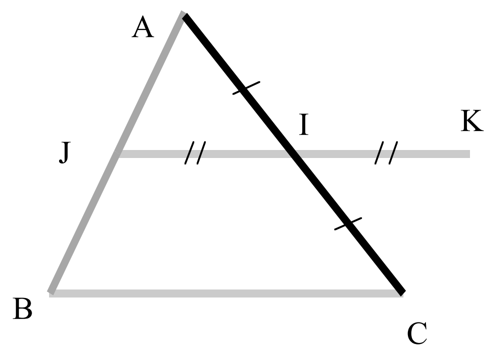
ABC est un triangle quelconque, I est le milieu de [AC], on trace la parallèle à (BC) passant par I, elle coupe [AB] en J. On veut montrer que J est le milieu de [AB].
Pour cela, on utilise K symétrique de J par rapport à I.



Ce problème peut être résolu à l'aide des propriétés du parallélogramme que nous venons de revoir. Pour l'élève, la première étape est de coder la figure à partir des données et de rechercher une figure-clé.

Il peut alors détecter une première figure-clé.

Au début il est important de demander à l'élève de l'extraire de la figure en nommant les extrémités des segments qui interviennent ; le



professeur peut vite se rendre compte que ce n'est pas évident pour tous.

On lui associe alors la propriété correspondante, soit sous forme de texte, soit sous forme de schéma, et la figure peut alors s'enrichir de nouvelles propriétés.

Pour la deuxième étape, le professeur a prévu une deuxième figure enrichie des codages correspondants, car les nouvelles conclusions servent de données pour la nouvelle recherche et donc changent de statut.

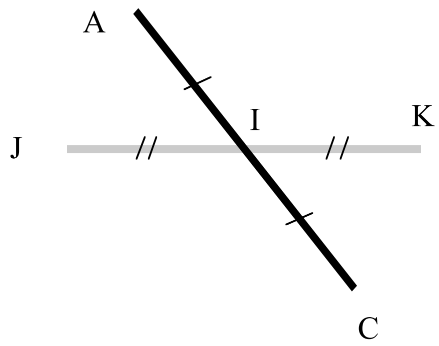
A ce stade, si un élève a omis de coder l'alignement B, J, A en donnant une couleur à la droite (AB), il peut arriver qu'il code seulement le parallélisme des segments [AJ] et [KC] au lieu de coder le parallélisme des droites (AJ) et (KC) ; il hésite à prolonger la couleur utilisée pour le côté [AJ] à la droite (AB). C'est une véritable difficulté. Le codage de l'alignement est une aide précieuse pour la surmonter.

Il faut maintenant rechercher une seconde figure-clé. On extrait cette figure, en nommant les sommets du quadrilatère.

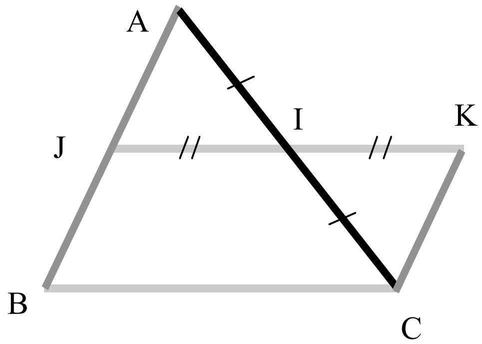
De nouveau on demande à l'élève de lui associer la propriété correspondante.

Avec AJ = JB et A, J, B alignés, il peut alors conclure que J est le milieu de [AB].

Lorsque l'élève a fait tout ce travail, il est en mesure d'écrire les étapes de son raisonnement.



Première figure-clé



Nouvelle figure codée

Deuxième figure-clé

Écrire une démonstration

Pour qu'un élève joue vraiment le jeu d'écrire une démonstration, il faut que celle-ci soit, à ses yeux, un véritable texte qui ait pour objectif d'expliquer de manière précise ce qu'il a fait sur la figure et non un exercice d'imitation d'un texte satisfaisant à un canon. Voici les moyens mis en oeuvre pour atteindre ce but :

- *Attendre que le problème soit résolu avant d'aborder l'écriture d'un texte*

Bien sûr pour un mathématicien expérimenté, et sans doute aussi pour des élèves en fin de scolarité, l'écriture d'une ébauche de démonstration est l'un des moyens de résoudre un problème de type « montrer que ». Mais ce n'est évidemment pas le cas pour un débutant[8]. Une démonstration est un texte qui doit respecter des contraintes qui, pour beaucoup d'élèves n'ont rien de naturelles. Elles ne deviennent familières et acceptables qu'après une assez

[8]Raymond Duval avait déjà souligné cette idée dans [5] et J. Houdebine dans [11].

longue pratique. Il est donc nécessaire, avant qu'un élève puisse se lancer dans l'écriture d'un texte qui explique ses déductions, que celles-ci soient déjà claires pour lui.

C'est pourquoi, dans la première étape, le travail se fait entièrement sur la figure sans contrainte d'écriture de texte ; pour la deuxième étape, un texte très libre, dans l'esprit des narrations de recherche[9], est demandé à l'occasion d'une situation non évidente et après que la solution ait été trouvée sur la figure. Et enfin pendant la troisième étape, des contraintes du type : *citer les théorèmes concernés au cours de la déduction* sont imposées au texte. Le cas présenté dans l'annexe 1, *Partir de la conclusion*, illustre bien ces trois étapes.

- *Travailler à partir des textes des élèves*

Un des points importants de notre démarche est de faire travailler les élèves sur des textes produits par eux. Par exemple, à l'occasion d'une correction, un élève lit son texte, tout le monde écoute et le professeur désigne un autre élève qui est chargé de lui mettre une note entre 0 et 10 en argumentant. Les autres élèves s'ils ne sont pas d'accord interviennent alors ; puis le professeur donne son avis. Ou encore nous demandons aux élèves, dans un travail de groupe, d'améliorer chacun des textes produits par les membres du groupe ; comme les rôles tournent, chaque élève accepte assez volontiers de reprendre son texte avec le regard des autres ; il est amené à développer ses arguments. Les textes de l'annexe 3, *Des copies à ne pas rejeter*, peuvent faire l'objet d'un tel travail.

Pour éviter d'imposer aux élèves des stéréotypes, nous ne donnons pas, a priori, le texte du professeur. A chaque fois que cela est possible, nous proposons comme corrigé d'une démonstration une ou plusieurs copies d'élèves (cf. annexe 2 : *Des copies d'élèves qui servent de corrigé*).

L'avantage de cette démarche est multiple :

- des textes variés vont être proposés par les élèves et l'étude de ceux-ci leur permet de mieux comprendre les véritables contraintes imposées aux textes de démonstration ; la plupart du temps, chacune des fautes ou des maladresses d'un texte est repérée par au moins un élève.
- l'attention des élèves est bien plus grande lorsqu'il s'agit d'étudier un texte produit par un autre élève que lorsqu'il s'agit d'étudier une démonstration de l'enseignant. Il est plus intéressant d'argumenter sur la qualité d'un tel texte que de s'attarder sur un « truc » qui est forcément bon.
- Plus les textes sont variés, plus l'élève pourra par la suite, au cours de sa scolarité, s'adapter à d'autres types de démonstrations.
- Plus fondamentalement cela donne aux élèves l'occasion de réécrire. Écrire est une démarche[10] complexe. Et cette démarche comporte comme une étape essentielle la reprise d'un texte déjà écrit pour le modifier et lui donner toute sa force.

- *Comprendre les textes des élèves*

Ce qui importe c'est que l'élève commence à écrire et que cela ait du sens pour lui. Les premiers textes qu'il va produire vont être le plus souvent très différents de ce qu'attend l'enseignant. Par exemple, dans notre démarche, l'aspect descendant (on part des données et on va vers la conclusion) est privilégié ; or certains élèves vont choisir de partir de la conclusion. D'autres vont faire des allers et retours entre ce qu'ils savent démontrer et la

---

[9] Voir [1] ou [16].
[10] Voir par exemple [1], p. 183.

question qui est posée ; ils écrivent à partir de ce qui les a mis sur la voie. Le travail du professeur n'est pas alors d'imposer à l'élève un texte standard ; il est de **rechercher dans le texte de l'élève des « ingrédients » utiles**, de tenter d'y retrouver la démarche sous-jacente et d'aider l'élève à améliorer son texte (cf. annexe 3 : *Des copies à ne pas rejeter*).

Dans la pratique cela suppose que le professeur relève beaucoup de textes d'élèves pour pouvoir suivre au mieux chaque élève. Il nous paraît important de les évaluer explicitement, même si cette évaluation n'est pas prise en compte dans les notations définitives, car c'est un moyen essentiel pour l'élève de savoir s'il progresse dans le sens des objectifs choisis et pour l'enseignant de repérer la manière dont l'élève a perçu le contrat. La logique qui se dégage des textes de l'élève nous permet de savoir s'il utilise l'outil proposé ou si c'est pour lui une gêne ; par exemple, s'il raisonne à partir de la question il faudra qu'il utilise les schémas de propriété à l'envers (cf. annexe 1 : *Partir de la conclusion*).

LES ROLES MULTIPLES DE LA FIGURE-CLE

Revenons sur les multiples rôles joués dans notre démarche par les figures-clés.

Faciliter la compréhension du contrat didactique

L'une des principales difficultés pour aborder la démonstration en Quatrième est de faire comprendre le changement du contrat didactique. L'élève doit désormais raisonner sur la figure et produire une démonstration qui exprime les étapes de ce raisonnement. Nous savons qu'il ne suffit pas d'exprimer clairement ce nouveau contrat pour que tous les élèves y souscrivent.

Dans la première étape de notre démarche, l'élève commence par un jeu de reconnaissance de sous-figures ; de même qu'on cherche, dans les images d'Épinal, le personnage caché, on cherche ici où se cache une figure-clé.

C'est avec un langage très simple que l'on fait comprendre les règles de ce jeu aux élèves. De plus comme il ne comporte pas d'étapes fastidieuses comme l'écriture, la plupart des élèves s'y engagent sans réticences.

Très vite, l'élève sent que le plaisir est d'avancer dans la solution du problème et que pour cela il lui faut les connaissances, c'est-à-dire les théorèmes associés aux figures-clés et en particulier leurs conclusions ; les figures associées aux théorèmes présentent ces conclusions de sorte qu'il est facile de savoir les codages que l'on peut légitimement ajouter à la figure. Pour mieux faire comprendre ce contrat nous utilisons des formulations variées : par exemple, à propos de la figure-clé on peut expliquer qu'il s'agit de la reconnaître comme sous-figure. Mais il peut être très utile d'ajouter des commentaires du genre : c'est une clé, elle peut ouvrir une porte (en référence au schéma associé à un théorème), mais cela ne suffit pas, il faut aussi faire la lumière (pour un élève qui, par exemple, conclut à un parallélogramme sans se servir de ses propriétés).

Enfin, quand vient le moment de rédiger, beaucoup d'élèves accompagnent leur texte des figures-clés utiles. Il est alors beaucoup plus facile pour l'enseignant de comprendre la démarche de l'élève et de l'aider à rendre son texte plus explicite ou plus structuré.

Faire des théorèmes un outil efficace

On constate que, dans les rédactions des premières démonstrations des élèves, l'une des insuffisances les plus persistantes concerne les énoncés des propriétés utilisées (cf. annexe 3 : *Des copies à ne pas rejeter*). Les élèves, conscients de cette difficulté, n'hésitent pas à dessiner dans la marge la figure-clé qui leur a servi, comme pour indiquer qu'ils ont bien vu la bonne propriété même s'ils ne sont pas capables de l'énoncer correctement.

En fait, nous pensons que les difficultés des élèves concernant la compréhension de l'organisation des énoncés de théorèmes ou de définitions sont plus importantes que celles concernant les démonstrations. Ces énoncés nous semblent, en effet, plus étrangers à la pratique langagière habituelle des élèves que les discours argumentatifs que sont, d'une certaine manière, les démonstrations. Nous pensons que ces énoncés ne prennent véritablement leur sens qu'à travers la résolution de problèmes.

Dans notre démarche, deux étapes vont être utiles pour surmonter cette difficulté :

- D'abord, on associe à l'énoncé une figure-clé et un schéma composé de deux figures qui soulignent l'existence de prémisses et d'une conclusion. Le théorème se transforme en un outil : on recherche une sous-figure qui est la figure-clé, on enrichit le codage à l'aide du schéma.
- Puis, au cours des résolutions successives de problèmes, de nombreux allers et retours se font entre figures-clés, énoncés de théorèmes, travail sur la figure et rédaction d'une démonstration. Ces allers et retours clarifient le sens de l'énoncé, font mieux saisir sa structure syntaxique et aident ainsi à l'écriture de nouveaux textes. Dans le cadre de ce jeu sur les figures, les théorèmes ne sont pas des énoncés que l'on place dans le texte en respectant des règles imposées par l'enseignant. Ils sont les outils qui permettent de travailler sur la figure. Cela explique en particulier que l'on n'observe pratiquement pas de confusion entre un théorème et sa réciproque.

Il nous semble tout à fait essentiel d'exiger, dans cette deuxième étape, l'énoncé de la propriété générale. Nous avons constaté, en effet, qu'un élève peut être capable d'écrire : « M est le milieu de [BC], (MN) est parallèle à (AC), donc N est le milieu de [AB] », tout en étant incapable d'écrire l'énoncé général : « *Si, dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un deuxième côté, elle passe par le milieu du troisième côté* ».

Dans la pratique les figures-clés deviennent très efficaces quand un élève lisant un énoncé de problème, trace la figure, code les données et, à mesure qu'il aperçoit des sous-figures qui sont des figures-clés, applique le théorème correspondant en ajoutant les codages adéquats. Quand il a fini de lire l'énoncé, il n'est pas rare que l'élève ait fait l'essentiel du travail de résolution. Nous favorisons cette démarche qui nous semble correspondre à ce que fait l'expert devant un problème de géométrie.

Des figures qui servent aux élèves

Pour beaucoup d'élèves en difficulté, l'échec dans la résolution d'un problème de géométrie est lié à l'angoisse d'être devant une tâche globale et complexe : découvrir le chemin qui fait passer des données à la conclusion contenue dans la question posée. On ne sait pas quoi faire de la figure. On observe fréquemment des élèves qui, à partir d'un énoncé de problème, construisent la figure et qui ne la regardent plus du tout au moment de répondre à une question du type « démontrer que ».

La recherche des figures-clés est un puissant moyen de faire disparaître ce stress : après un travail sur la mise au point de figures-clés et de schémas pour les énoncés concernés, coder la figure avec les données, puis extraire une sous-figure qui soit une figure-clé sont des tâches à la portée de tous. La recherche peut commencer sans qu'on ait une idée du lien entre les données et la question. Dès que l'on a repéré une figure-clé, un sentiment de réussite apparaît.

Ce travail, qui concerne essentiellement la figure, organise dans l'esprit de l'élève les propriétés de celle-ci. La vision de la figure n'est plus simplement perceptive. Elle est d'une certaine manière discursive[11], même si un texte n'est pas encore écrit. Cela est d'autant plus flagrant que l'élève cherche des figures-clés à mesure qu'il ajoute des codages.

La recherche de figures-clés est également utile pour affiner la lecture d'une figure : elle apprend à « voir » un quadrilatère dont les côtés ne sont pas tracés, à voir des égalités de distances alors que les segments correspondants ne sont pas tracés, à voir la droite qui supporte un segment.

Elles restent des objets « transitionnels »

Raymond Duval dans [5] souligne le risque d'introduire « des apprentissages intermédiaires qui fassent perdre de vue ce pourquoi ils sont instaurés ». Il s'agit ici de ne pas subordonner à la maîtrise des figures-clés l'apprentissage de la résolution de problèmes de géométrie et de sa rédaction en termes de démonstration. Cette remarque est d'autant plus essentielle que l'on observe que les figures-clés ne sont peut-être pas une aide significative pour quelques élèves, en particulier pour ceux qui privilégient naturellement une démarche qui part de la conclusion du problème pour remonter jusqu'aux données (cf. annexe 1 : *Partir de la conclusion*).

C'est pour cela que les figures-clés sont présentées comme une aide et comme un outil éventuel ; l'élève est associé à la mise au point de cet outil en particulier en réalisant des fiches qu'il complète lui-même. Une séance de cours peut être consacrée à réaliser ces fiches et à en discuter : on s'assure que ce sont bien les tracés minima qui figurent sur les figures-clés et que les figures-clés, les schémas et les énoncés sont associés de manière pertinente.

En revanche, les figures-clés ne sont pas présentées comme au centre de l'apprentissage. Peu d'activités sont proposées en vue d'en assurer la maîtrise. Aucun exercice de contrôle ne porte sur leur utilisation. Si un élève écrit sans y recourir ou s'il les utilise de manière non standard nous n'intervenons pas pour le remettre dans « le droit chemin ». Elles ne sont l'objet de travail qu'en début d'année ; elles sont associées ensuite aux propriétés pour lesquelles elles présentent un intérêt certain du point de vue des tracés minima (par exemple triangle rectangle et cercle circonscrit, médiane relative à l'hypoténuse dans un triangle rectangle etc.) Au moment de l'étude du théorème de Pythagore, nous estimons que la plupart des élèves maîtrisent suffisamment la démonstration et il est alors intéressant d'introduire de nouvelles connaissances comme le raisonnement par l'absurde, sachant que la démarche ici est plutôt de type calculatoire.

En cours d'année, elles sont encore utiles en remédiation, pour aider un élève qui a compris le contrat à corriger son texte ou à le compléter quand il y manque certains rappels de données ou des propriétés générales.

CONCLUSION : L'ORIGINALITE DU TRAVAIL DE MARIE-PAULE

L'idée de figure-clé a conduit Marie-Paule à la mise au point d'une nouvelle façon d'aborder la démonstration en Quatrième. De nouvelles recherches seraient nécessaires pour valider et approfondir ce point de vue. Une première étape consiste à essayer de dégager les idées nouvelles qu'elle apporte.

[11] Voir [3].

- *Connaissances heuristiques, connaissances procédurales.*

Dans les travaux précédents, certaines figures jouaient un double rôle de connaissance heuristique et de connaissance procédurale. Dans ce travail les deux rôles sont plus nettement séparés.

On peut penser que la figure-clé et son usage font essentiellement partie des connaissances heuristiques : elle permet de reconnaître une sous-figure utile pour appliquer le théorème. L'idée de tracés minima est ici essentielle.

La présentation du théorème sous forme d'un schéma avec deux figures est plutôt du côté procédural : il explicite de quelle manière, quand on a trouvé une figure-clé, on peut compléter le tracé et le codage d'une figure. la présentation du schéma comme un enrichissement de la figure correspond tout à fait à une démarche de résolution de problème sur la figure : on enrichit celle-ci de codages à mesure qu'on est sûr d'une propriété.

En revanche nous pensons que la figure-conclusion ne joue pas de rôle heuristique, même si l'élève part de la conclusion ; c'est plutôt la dernière colonne du tableau présenté ci-dessus qui peut jouer ce rôle.

- *Résolution de problème et rédaction de démonstration*

La séparation entre la résolution de problème et la rédaction d'une démonstration est énoncée comme un principe clair par plusieurs auteurs[12]. Mais elle n'est pas toujours évidente à mettre en oeuvre. Par exemple, dans l'article [8] de M.-A. Egret, il semble que le travail sur le texte intervienne avant que l'ensemble de la classe soit tombé d'accord sur la résolution du problème.

Dans la démarche de Marie-Paule, la mise en texte et la résolution de problème sont bien séparées ; les discussions en termes de codages et de figures-clés permettent aux élèves de parler de la résolution du problème avec un langage peu sophistiqué. Il est beaucoup plus facile d'aborder l'étude de l'organisation déductive du discours ou de la structure des énoncés si on s'appuie sur une sémantique solide. Le fait d'aborder la rédaction d'un texte à l'occasion de la résolution d'un problème complexe est du coup un facteur essentiel. On en constate l'efficacité, par exemple, dans le fait que la confusion théorème direct et réciproque ne se produit pratiquement pas au bout d'un mois de travail avec les élèves.

- *La liberté d'écriture*

L'un des points importants de la démarche de Marie-Paule est de donner le plus possible de liberté dans l'écriture de textes mathématiques. Elle s'appuie sur l'idée que la maîtrise du langage chez les élèves est bien meilleure qu'on ne le pense généralement, à condition que les textes qu'ils manipulent aient une véritable signification à leur yeux.

Une équipe de Montpellier a montré l'efficacité de cette idée dans le cadre des « Narrations de recherche »[13]. La démarche consiste ici à aborder l'écriture des démonstrations en faisant écrire très librement des textes mathématiques aux élèves, puis en ajoutant peu à peu des contraintes.

Dans la démarche de Marie-Paule, les situations dans lesquelles se trouvent les élèves pour écrire assez librement ce qu'ils ont trouvé sont tout à fait du type narrations de recherche. Cependant, le travail qui précède la rédaction du texte oriente très nettement celui-ci vers une argumentation sur les propriétés d'une figure en utilisant les théorèmes. Les textes produits

[12] Voir par exemple [5] ou [12]
[13] Voir par exemple [1] p. 143 ou [16]

sont de ce fait proches d'une démonstration et sont donc faciles à exploiter pour l'apprentissage de celle-ci.

- *Figure prototype*

L'idée de figure prototype est présente ; mais cette fois de manière plutôt positive : dans un enseignement habituel, beaucoup de figures qui sont présentées comme prototypes sont peu efficaces ; le but est ici de mettre en valeur des figures prototypes bien adaptées aux tâches de résolution de problème et fortement rattachées à la démarche démonstrative puisque la tâche consiste explicitement à compléter le codage à l'aide d'un énoncé de théorème.

- *Découverte des structures des énoncés et des démonstrations*

Dans la pratique que nous venons de décrire, le travail sur la lecture des énoncés de théorème et sur la rédaction de démonstration est, d'une certaine façon, simultané. Les découvertes des organisations déductives sous-jacentes à ces deux types de textes se confortent l'une l'autre. C'est la rédaction des démonstrations qui permettra à certains élèves de progresser sur la capacité d'énoncer correctement les propriétés auxquelles ils pensent.

R. Duval montre bien la nécessité de se donner des moyens non textuels de faire découvrir aux élèves la structure des textes mathématiques et en particulier celle des démonstrations. Il propose pour cela les réseaux sémantiques. M.-A. Egret met en œuvre cette idée ; mais les pratiques qu'elle décrit dans ses articles et ses exposés semblent faire une part trop importante à une institutionnalisation de ces réseaux pour qu'ils gardent le statut d'objets transitionnels. Or R. Duval considère qu'il est essentiel que ceux-ci gardent ce statut (s'opposant ainsi, par exemple, à l'utilisation des déductogrammes décrite dans [17]).

Avec le même objectif, au lieu de mettre en œuvre un seul outil, nous préférons mobiliser des moyens multiples et légers :

- la conception de figures-clés et de schémas met implicitement en évidence la structure des textes de théorèmes,
- la résolution des problèmes par la mise en place progressive de codage en s'appuyant sur les figures-clés préfigure l'organisation déductive de la démonstration,
- le travail à la manière des narrations de recherche en faisant évoluer les écrits des élèves leur permet de découvrir peu à peu cette organisation,
- le statut des énoncés est mis en évidence par des soulignements.

Dans ce type de démarche rien n'empêche dans un soutien d'un élève en difficulté d'avoir recours de manière occasionnelle à d'autres outils comme les réseaux sémantiques où à des tableaux.

De cette manière, le risque de faire perdre à l'un de ces outils son statut d'objet transitionnel est réduit, ainsi que le risque d'imposer à un élève un outil qui ne lui convient pas.

Bibliographie

[1] E. BARBIN, R. DUVAL, I. GIORGIUTTI, J. HOUDEBINE, C. LABORDE, Produire et lire des textes de démonstration, Éditions Ellipses, Paris, 2001.

[2] N. BELLARD ET M. LEWILLION, *Schémas pour la compréhension des théorèmes en classe de 4ème*, Produire et lire des textes de démonstration, p. 129-141, Éditions Ellipses, Paris, 2001.

[3] F. CORDIER ET J. CORDIER, *L'application du théorème de Thalès. Un exemple du rôle des représentations typiques comme biais cognitifs,* Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 11, n°1, p. 45-64, 1991.

[4] R. DUVAL, *Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence,* Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Vol 1, p. 57-74, IREM de Strasbourg, 1988.

[5] R. DUVAL ET M.-A. EGRET ; *L'organisation déductive du discours*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Vol 2, p. 41-64, IREM de Strasbourg, 1989.

[6] M.-A. EGRET, *Proposition pour introduire des élèves à la démonstration*, Publications de l'Institut de Mathématiques de Rennes, Fascicule 5, 1989-1990.

[7] M.-A. EGRET, D. GUIN, G. KUNTZ, G. METIVIER, N. VOGEL, *Réflexions sur l'apprentissage de la démonstration en géométrie de 4ème autour d'un logiciel*, L'ouvert, N° 52, p. 32-40, IREM de Strasbourg, 1988.

[8] M.-A. EGRET ET R. DUVAL, *Comment une classe de Quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Vol 2, p. 25-40, IREM de Strasbourg, 1989.

[9] D. GUIN, *Réflexions sur les logiciels d'aide à la démonstration en géométrie*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Vol 2, p. 89-109, IREM de Strasbourg, 1989.

[10] M.-C. HERVIER ET J. RENAUD, Aide individualisée en Mathématiques ; classe de 2nde, CRDP, Nice 2002.

[11] J. HOUDEBINE, *Démontrer ou ne pas démontrer, voilà la question,* Repères IREM, N° 1, Topiques éditions, 1990.

[12] J. HOUDEBINE, La démonstration ; écrire des mathématiques au Collège et au Lycée, Éditions Hachette, Paris, 1998.

[13] L. MESQUITA ET J. C. RAUSCHER, *Sur une approche d'apprentissage de la démonstration*, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Vol 1, p. 95-109, IREM de Strasbourg, 1988.

[14] R. NOIRFALISE, *Figures prégnantes en géométrie*, Repères IREM, n°2, p. 51-58, Topiques Éditions, 1991.

[15] R. NOIFALISE, *Contribution à l'étude didactique de la démonstration,* Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 13, p. 229-256, 1993.

[16] M. SAUTER, L'écrit en mathématiques, analyses de narrations de recherche d'élèves, IREM de Montpellier, 1998.

[17] D. GAUD ET J.-P. GUICHARD, *Apprentissage de la démonstration*, Petit X, N° 4, p. 5-25, 1984.

[18] S. AG ALMOULOUD, *DEFI : outil informatique de révélation du rôle de la figure et d'apprentissage de la démonstration*, Repères IREM, n°9, Topiques Éditions, 1992.

[19] M.P. Kerboeuf et J. Houdebine, *Les figures-clés : une idée pour l'apprentissage de la démonstration en Quatrième*, Repères IREM, n°59, p. 85-103.

Annexe 1

PARTIR DE LA CONCLUSION

Voici trois copies d'un même élève. La première correspond à la solution du premier problème avec la consigne « Trouver les figures-clés », la seconde se situe environ un mois après et la troisième, deux mois.

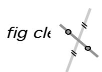
C'est un élève qui éprouve des difficultés pour rédiger un texte démonstratif. Sur la première copie, il fait comprendre qu'il sait détecter les figures-clés et qu'il connaît les énoncés des propriétés associées à ces figures. Dans la seconde il rédige un texte proche de sa démarche et énonce les deux propriétés sans les intégrer vraiment parce que sans doute cela reste pour lui seulement une contrainte du prof. Surtout il raisonne à partir de la conclusion et le sens des schémas est une gêne supplémentaire.

Cependant, on peut penser que les figures-clés lui sont utiles : il n'a aucun mal dans la première copie à les repérer ; le dessin en bas de la deuxième copie semble être là pour indiquer que si son texte n'est pas satisfaisant, il a bien trouvé la solution du problème.

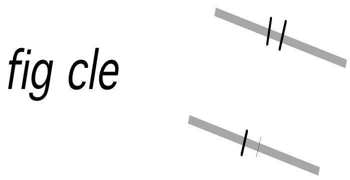
Énoncé

ABC triangle quelconque. M est le milieu de [AB]. N est le milieu de [AC]. On veut démontrer que (MN) est parallèle à (BC). Pour cela on place le point P symétrique du point M par rapport au point N.

Solution[14]



Si les diagonales d'un quadrilatère se coupe en leur milieu alors c'est parallélogramme



Si un quadrilatère a deux côtés opposés parallèle et de même mesure alors c'est un parallélogramme

[14] Pour des raisons de lisibilité les copies ont été dactylographiées

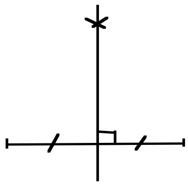
Énoncé

Tracer un quadrilatère OELM. Tracer les médiatrices des segments [OM] et [OE] : elles se coupent en I. Tracer les médiatrices des segments [ML] et [LE] : elles se coupent en J. Prouver que la droite (IJ) est la médiatrice du segment [ME].

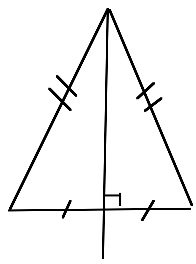
Solution

(IJ) est la médiatrice de [ME] car I et J sont équidistants de N et de E. J est le point d'intersection des médiatrices des segments [ML] et [LE], I est le point d'intersection des médiatrices de [OE] et [OM]. Si un point est sur la médiatrice d'un segment alors il est équidistant des extrémités de ce segment et si il est équidistant des extrémités d'un segment alors il est sur la médiatrice de ce segment

Si



alors



Enoncé

[AC] est le diamètre du cercle de centre O. ABC est un triangle isocèle en C. (AB) coupe le cercle en F et (BC) en E. Démontrer toutes les propriétés que vous pouvez.

Solution

AFC est rectangle car si un triangle inscrit dans un cercle a un côté diamètre [AC] du cercle C, O est alors le milieu de l'hypoténuse donc $\widehat{AFC}$ droit. Si un triangle est inscrit dans un cercle et que un de ses côtés est un diamètre alors ce triangle est rectangle, même chose pour AEC, EBC et ABF. ABC est isocèle et F sa hauteur donc dans un triangle isocèle la hauteur issue du sommet principal est aussi la médiatrice et la médiane de la base.

Annexe 2

DES COPIES D'ELEVES QUI SERVENT DE CORRIGE

Plutôt que de donner comme corrigé la démonstration du prof, nous donnons des démonstrations d'élèves, chaque fois que cela est possible. Cela encourage les élèves à rédiger avec soin pour être l'auteur d'une copie donnée en exemple. Si un élève en difficulté rédige une démonstration sans faute, choisir sa copie est un puissant encouragement. En outre, cela permet de faire apparaître aussi bien la diversité des solutions que la diversité des styles de rédaction possible.

On observe, par exemple, que dans la première copie le passage de l'angle droit à la perpendiculaire (Comme E est droit, alors (EO) ⊥ (CA)) est explicité ; il ne l'est pas dans la deuxième. De même la première énonce explicitement la conclusion finale, la seconde ne le fait pas.

Le second texte est intéressant dans sa rédaction car la propriété s'applique à deux triangles différents et l'élève évite les répétitions inutiles. Les propriétés utilisées sont mises en évidence par une flèche en début de ligne et les pas de démonstration sont bien marqués.

Énoncé

Soit (C) un cercle de centre O. Soient C et A deux points de ce cercle et D le point diamétralement opposé à C. Soit (C') le cercle de diamètre [OC] et E le point d'intersection de (AC) avec ce cercle. Montrer que E est milieu de [AC].

Première copie

Comme (CD) diamètre du cercle (C'), comme E point du cercle (C') et comme quand un triangle est inscrit dans un cercle et que l'un de ses côtés est un diamètre alors se triangle est rectangle donc COE est un triangle rectangle en E.

Comme $\widehat{E}$ est droit alors EO ⊥ CA.
Comme EO ⊥ CA donc EO hauteur du triangle COA.
Comme C et A sont des points du cercles alors (CO) et (CA) sont des rayons donc CO = CA.
Comme CO = CA, comme (EO) hauteur de COA et Comme dans un triangle isocèle la hauteur issue du sommet principale est aussi la médiatrice de la base donc EO médiatrice de (CA) donc CE = EA donc E milieu de [AC].

Seconde copie

ADC est un triangle inscrit dans le cercle C.. Un de ses côtés est un diamètre de C.
CEO est un triangle inscrit dans le cercle C'. Un de ses côtés est un diamètre de C'
- Si un triangle est inscrit dans un cercle et que un de ses côtés est un diamètre de ce cercle, alors ce triangle est rectangle

Donc [CA] ⊥ [AD] et [CA] ⊥ [EO].
- Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles.

Donc [AD] // [EO].
[EO] ⊥ [CA), [AD] // [EO] et O est le milieu de [CD].
→ Dans un triangle, si une droite est parallèle à un côté et coupe un deuxième côté en son milieu alors elle coupe le troisième côté en son milieu.

Annexe 3

DES COPIES A NE PAS REJETER

Une étude superficielle des trois copies suivantes peut conduire à les rejeter.

Pour la première copie, pourtant, on peut noter que les premières lignes sont satisfaisantes. L'énoncé de la propriété est bien sûr désastreux ; mais il faut savoir que l'une des plus grandes difficultés des élèves débutant la démonstration est de retrouver un énoncé correct pour la propriété à laquelle ils pensent. Si on écrit : « équidistant de » au lieu de « sur les », le texte devient déjà plus cohérent, « ils sont liés » semblant vouloir dire qu'ils sont sur la même droite. Il est alors nécessaire de questionner l'élève et de travailler sur le sens des mots qu'elle emploie et sur ce qu'elle veut exprimer. Le paragraphe suivant est cohérent avec le précédent : il faudrait lire « D et A sont équidistants de B et de C ». Dans ce texte les données sont traduites de manière pertinente en terme de distance, les points A et D sont repérés ; la figure-clé détectée peut alors être un bon support pour travailler sur l'énoncé de la propriété.

Il est vrai que le terme équidistant pose problème, cela se voit aussi dans les deux copies suivantes. Une bonne discussion sur le sujet peut faire faire à ces élèves un progrès spectaculaire.

Dans la deuxième copie la représentation de la situation est structurée à partir du segment [BC] : il coupe la droite perpendiculairement. Un travail approfondi est à faire sur l'énoncé et ce qu'il implique comme prémisses.

Pour la troisième copie, la présence des égalités en début de copie laisse à penser qu'il a compris la solution du problème même s'il n'est pas capable de bien la rédiger. L'organisation générale du texte va dans le même sens. Mais on constate là encore de grosses difficultés à produire l'énoncé d'une propriété et un usage plus qu'approximatif du mot équidistant.

Énoncé

Soit ABC un triangle équilatéral et BCD un triangle isocèle de sommet principal D. Montrer que (AD) est perpendiculaire à (BC).

Première copie

Comme ABC est un triangle équilatéral donc AB = BC = AC
Comme BCD est un triangle isocèle en sont sommet principal donc BD = CD
Si deux point sont sur les extrémités d'un segment alors il sont liées et elle coupe la base en son milieu donc se sera sa médiatrice.
Comme les points D et A sont les extrémités du segment [BC] alors la médiatrice coupera le segment [BC] en son milieu.
Donc (AD) est perpendiculaire à [BC].

Deuxième copie

Comme le triangle ABC est équilatéral et que le triangle BCD est isocèle.

Dans le triangle ABC :

ABC est équilatéral donc A est à égale distance de B et de C alors on peut dire que A est équidistant.

Dans le triangle BCD :

BCD est isocèle donc D est à égale distance de B et de C alors il est lui aussi équidistant.

Donc si deux points sont à égale distance d'une même droite alors le segment qui passe par ces deux même points coupe cette droite perpendiculairement alors c'est une médiatrice

Troisième copie

BD = CD Si deux points sont équidistants d'un même point alors
BA = CA ce point est sur la médiatrice donc D est sur la médiatrice
Si deux points sont équidistants d'un même point alors
ce point est sur la médiatrice donc A est sur la médiatrice
DA est la médiatrice donc [DA] perpendiculaire à [BC]