"2 EST-IL SUPERIEUR OU EGAL A 1 ?"

I - LA DECOUVERTE DU PROBLEME

Quel professeur de mathématiques n'a jamais entendu dans sa classe :

"*Oui mais, on ne peut pas dire que $x^2 + 1 \geq x^2$ puisque $x^2 + 1$ n'est jamais égal à x^2*" ?

Et chaque professeur, bien entendu, de donner une réponse avec de bons arguments logiques... qui doivent convaincre tous les élèves. Et pourtant, bien souvent, quelques jours (semaines) plus tard, la même exclamation retentit de nouveau ; nouvelles explications, avec des variantes. Si la situation se renouvelle encore plusieurs fois, on se laisse aller à la colère, au découragement, en se disant que certains élèves ne comprendront jamais. Il faut se rendre à l'évidence : nos discours ne servent à rien.

Notre réflexion aboutit à l'idée qu'une façon de faire évoluer les élèves est de créer dans la classe une contradiction qui les oblige à réviser leurs conceptions, sans que l'enseignant leur impose son point de vue. Nous décidons alors de tester, dans une classe de première A1 où le problème a déjà été évoqué plusieurs fois, la séquence suivante :

Chaque élève répond individuellement, par écrit, à la première question :

$2 \geq 1$: Vrai ? Faux ? Ni vrai, ni faux ? **Justifiez votre réponse.**

Le professeur récupère les réponses et pose alors la deuxième question :

$2 \in [\,1,+\infty\,[$: Vrai ? Faux ? Ni vrai, ni faux ? **Justifiez votre réponse.**

De nouveau, les réponses sont collectées et le professeur demande alors aux élèves de comparer les questions posées, ce qui donne lieu à un débat dans la classe. Pour clore ce débat, il demande à chacun de répondre de nouveau à la première question, en précisant s'il a changé d'avis.

Voici les résultats à la première question : sur 30 élèves,
16 répondent : VRAI, avec les arguments suivants :

* pour 10 : une des deux phrases "$2 > 1$" ; "$2 = 1$" est vraie.
* pour 3 : $2 - 1 \geq 0$ est vraie.
* pour 1 : $2 \in [\,1\,,+\infty\,[$.
* pour 2 : arguments très confus.

10 élèves répondent : FAUX car $2 \neq 1$.
4 élèves répondent : NI VRAI, NI FAUX, car $2 > 1$ est vrai mais $2 = 1$ est faux.

Il est intéressant de remarquer que pour montrer que "$2 \geq 1$", trois élèves utilisent "$1 \geq 0$". Pour ces élèves, il est naturel de penser que "1 est positif". Le rôle de "0" est en effet très spécifique. Dans le même ordre d'idée, nous avons remarqué que l'équation "$x^2 + 1 \geq 0$" ne pose pas de problèmes aux élèves alors que "$x^2 \geq -1$" leur paraît bien moins évidente et provoque souvent des réponses du genre "c'est impossible".

Un extrait de copie mérite d'ailleurs d'être cité :

$2 \geq 1$

C'est typiquement mathématiques, que deux
soit supérieur à 1 c'est tout à fait vrai, mais
qu'il puisse l'être égal à 1 ce n'est pas
possible. Pour moi, c'est parce que c'est mathématique
si je devais l'écrire d'une autre manière
je mettrai :

$2 > 1$

Je ne changerai pas les règles de mathématiques,
donc j'admettrai, ou nous admettons, comme disait
le théorème de Math que $2 \geq 1$.
C'est une loi, une règle de Math, sans rien
de plus, et pas vraiment logique.
Mais c'est la difficulté qui fait la beauté
des Mathématiques !

Visiblement, pour cette élève, le professeur lui demande de croire que 2 = 1. Elle sait bien que ce résultat est faux mais *"c'est des maths, alors..."*. Ce genre d'argument, couramment utilisé par les "nuls en math", n'est pas à négliger car c'est grâce à lui que ces élèves se donnent l'autorisation de ne pas comprendre. Il est sans doute utile de regarder de plus près quels arguments nous permettront d'emporter leur conviction.

Ceci dit, le débat semble avoir été profitable, puisqu'en fin de séquence, 24 élèves sur 30 pensent que $2 \geq 1$ est vrai. On trouve même, dans une copie, la réflexion : "*j'ai changé d'avis, çà devient plus logique sous forme de représentation en intervalle que sous la forme $2 \geq 1$*". Et, dans une autre copie : "*$2 \geq 1$ est vrai ; je n'ai pas changé d'avis, mais cette fois, j'ai compris*".

Malgré tout, il reste encore un certain nombre d'élèves à convaincre.

Nous décidons alors de renouveler l'expérience dans une classe de seconde, classe où la question "$x^2 + 1 \geq x^2$" n'a jamais été évoquée, en reposant la même question :

$2 \geq 1$: Vrai ? Faux ? Ni vrai, ni faux ?

La surprise est de taille : sur 34 élèves,

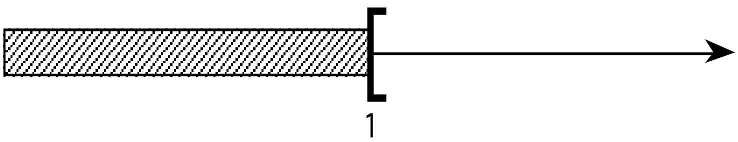
* 18 répondent FAUX car $2 > 1$ mais $2 \neq 1$.
* 15 répondent NI VRAI, NI FAUX car $2 > 1$ mais $2 \neq 1$.
* 1 répond VRAI car $2 > 1$ est vrai, donc 2 est bien supérieur ou égal à 1.

Deux constatations s'imposent :

- l'affirmation $2 \geq 1$ n'est vraiment pas naturelle. Un bref sondage en salle des professeurs ne fait que confirmer cette constatation : il n'y a guère que les professeurs de Mathématiques qui donnent une bonne réponse.

- le même argument conduit les uns à conclure "faux", et les autres "ni vrai, ni faux" : surprenant !

La suite du débat éclaire quelque peu les choses : tous les élèves admettent sans difficulté l'équivalence entre "$x \geq 1$" et "$x \in [1, +\infty[$". De même, $2 \in [1, +\infty[$ est une évidence. Notons que les connaissances sur les intervalles sont assez solides et que beaucoup d'élèves s'appuient sur des schémas du type :



On pourrait croire alors que $2 \geq 1$ sera vrai pour tous : il n'en est rien. Deux causes principales peuvent être trouvées à cette difficulté :

- dans le langage courant, taire une partie de l'information est souvent considéré comme un mensonge. N'est ce pas un faux témoignage de dire : "*Cette voiture était verte ou jaune*", alors qu'on sait pertinemment qu'elle est verte ?

  Ici chacun sait que $2 > 1$; pourquoi écrire $2 \geq 1$, qui est moins précis ?

- l'autre est d'ordre linguistique et logique. Le sens du mot "ou" est plus difficile à maîtriser qu'il n'y parait. Bien que l'énoncé "$x \geq 1$" comporte le mot "ou", cette expression est ressentie comme la juxtaposition de deux conditions : "$x > 1$" et "$x = 1$". Pour certains, cela conduit à dire qu'il n'est ni vrai ni faux puisque l'une est vraie et l'autre fausse. Pour d'autres, "$2 \geq 1$" devient "$2 > 1$ et $2 = 1$" qui est évidemment fausse. Dans les deux cas, le "ou" n'est même pas entendu.

II - UNE SEQUENCE EFFICACE

Nous proposons donc une séquence à effectuer dès que le problème se pose et à ce moment là seulement.

Elle se déroule en quatre étapes: les trois premières lors d'une première séance, la quatrième lors d'une seconde.

1 - Première séance *(Environ 20 minutes)*

Elle est constituée de trois questions qui sont écrites les unes après les autres au tableau, les élèves y répondant par écrit : avant de poser une nouvelle question, l'enseignant collecte les réponses à la précédente.

Question N° 1 : "$2 \geq 1$"
Est-ce vrai ? Faux ? Ni vrai, ni faux. Pourquoi ?

Question N° 2 : "$2 \in [1, +\infty[$"
Est-ce vrai ? Faux ? Ni vrai, ni faux. Pourquoi ?

Question N° 3 : (A faire éventuellement par groupes de 2 ou 3).
Ecrire "$x \in [1, +\infty[$" puis "$2 \in [1, +\infty[$" sous forme d'inégalités.

2 - Deuxième séance *(Un autre jour)*

Les élèves ont pu discuter entre eux et confronter leurs idées. Le professeur leur parle alors des résultats obtenus à la première séance. Nous avons pu remarquer qu'un grand nombre de ceux qui affirment que "$2 \geq 1$" n'est pas vrai admettent par contre que "$2 \in [1, +\infty[$" l'est.

Un débat peut alors intervenir entre les élèves, il est suivi de la quatrième question.

Question N° 4 : "$2 \geq 1$"
Est-ce vrai ? Faux ? Ni vrai, ni faux ?
Avez-vous changé d'avis ?

III - CONCLUSION

Ce genre de séquence a plus ou moins bien marché car les groupes-classes varient d'une année sur l'autre : ils peuvent être actifs et permettre un débat riche et varié, ou au contraire être assez passifs et ne pas laisser naître un débat cognitif intéressant.

De toute façon, on ne peut espérer convaincre toute une classe, le principal est de faire réfléchir les élèves, le cheminement se faisant à longue échéance ; il est intéressant toutefois de préciser que dans une classe de terminale dont les élèves avaient fait une activité de ce type en première, le problème ne s'est pas reposé, ce qui laisse supposer que la réflexion s'est faite pour une grande partie d'entre eux.

Il semble utile de mettre au point d'autres situations ayant le même objectif. On peut au cours de la résolution (éventuellement graphique), d'une équation de la forme "$x \geq \sqrt{x}$" demander aux élèves ce qu'ils pensent de "$2 \geq \sqrt{2}$". Ceci nous permettra, un tant soit peu, d'évaluer les effets de notre fiche.

ALIGNEMENT

C'est au hasard de discussions informelles qu'a germé l'idée d'inclure ce thème dans notre recherche. En effet, il apparaît que les démonstrations faisant intervenir l'alignement sont fréquemment mal rédigées par les élèves, et de surcroît, certaines fautes reviennent sans cesse dans les copies, malgré nos explications répétées. Cette situation correspond exactement au sujet de notre recherche : "comment améliorer la rédaction des démonstrations par les élèves ?"

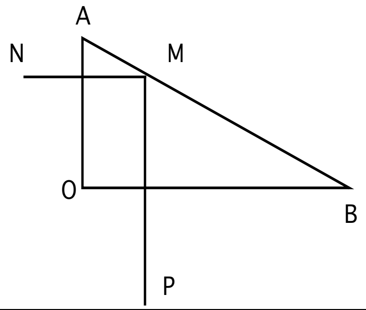
Nous allons d'abord présenter quelques fautes typiques, extraites de copies d'élèves de seconde. Nous exposerons les grandes étapes de notre travail, pour terminer par une analyse plus détaillée des causes d'erreur.

I - ETUDE DE QUELQUES EXEMPLES

1 - Premier exemple

AOB est un triangle rectangle en O ; M un point du segment [AB], distinct de A et B. On trace le symétrique N de M par rapport à (AO), et le symétrique P de M par rapport à (BO).

Montrer que O est le milieu de [NP].



Pour cet exercice, deux méthodes différentes de résolution contiennent chacune une erreur caractéristique.

Première rédaction

Comme N est le symétrique de M par rapport à (AO), alors (AO) est la médiatrice de [MN]. O, appartenant à (AO), est équidistant de M et N, donc OM = ON.

De même, comme P est le symétrique de M par rapport à (BO), alors (BO) est la médiatrice de [MP], et OM = OP.

Donc ON = OP et O est le milieu de [NP].

Deuxième rédaction

M et P sont symétriques par rapport à (OB) donc (MP) est perpendiculaire à (OB).De plus, AOB est rectangle en O, donc (OB) est perpendiculaire à (AO). Or, si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, elles sont parallèles ; donc (AO) // (MP).