

A la lecture des copies de professeurs et d'élèves sur une même démonstration, apparaît une très grande disparité :

- pour les professeurs, les exigences ne sont pas les mêmes suivant qu'ils enseignent en collège ou en lycée mais les différences entre les enseignants de seconde peuvent aussi être considérables : pour la même démonstration, on peut passer de trois lignes à une demi-page.
- chez les élèves, certains types de phrases ou de mots reviennent systématiquement et on peut assez vite les regrouper suivant leur formation antérieure, ce qui conduit à penser qu'ils retiennent finalement trop l'aspect superficiel d'une rédaction en privilégiant la forme par rapport au fond.

La question se pose en seconde de savoir si les élèves perçoivent les différentes façons de s'exprimer comme équivalentes et si certaines d'entre elles ne sont pas des obstacles à la compréhension de la démonstration. L'emploi de formes très stéréotypées est en effet souvent un indice du manque de maîtrise.

La structure d'un texte démonstratif cherche à mettre en évidence le statut des propositions qu'il contient. Les unes sont des hypothèses, les autres des conséquences, d'autres encore sont des théorèmes ou bien des résultats intermédiaires. Beaucoup d'élèves et aussi certains enseignants pensent implicitement que la meilleure manière de faire apparaître ce statut est l'ordre dans lequel on va placer les propositions. Ceci est doublement dommageable. D'une part, on risque d'oublier que ce sont les mots de liaison qui sont en fait les indicateurs essentiels de ces statuts. D'autre part, on va se restreindre de manière très artificielle sur la liberté d'écriture ; on va dévaloriser des démarches tout à fait satisfaisantes et très naturelles chez les élèves comme les remarques heuristiques ou l'utilisation du "parce que".

C'est pourquoi nous avons pensé qu'une activité "Rédigez en liberté" présentée en début d'année à nos élèves leur permettrait de se libérer de leur peur devant la rédaction d'une démonstration, notamment en géométrie, et de faire preuve de plus d'initiative dans la recherche de la solution. Puis, dans le courant de l'année, il est souhaitable pour varier les activités proposées aux élèves, de les faire travailler sur une "fiche à trous", exercice qui conduit à mieux cerner le statut des propositions et par suite, à faire un meilleur usage des mots de liaison. Enfin, il ne faut pas oublier de leur montrer de temps en temps les limites de leur liberté, en obligeant certains à produire une copie "presque parfaite" au bout d'un certain nombre d'essais, à condition bien sûr qu'ils soient réceptifs à ce genre d'exercices.

## PREMIERE ACTIVITE : "REDIGEZ EN LIBERTE"

### I - PRESENTATION

Cette activité a pour objectif principal de faire travailler les élèves sur dix rédactions différentes de la même démonstration pour leur faire mieux sentir les libertés et les contraintes. Pour cela nous avons choisi l'exercice suivant dont la démonstration est suffisamment complexe (utilisation de trois théorèmes : triangle inscrit dans un demi-cercle, parallèles et perpendiculaires, hauteur et médiatrice dans un triangle isocèle), mais ne pose pas de problème de connaissances à des élèves en début de seconde.

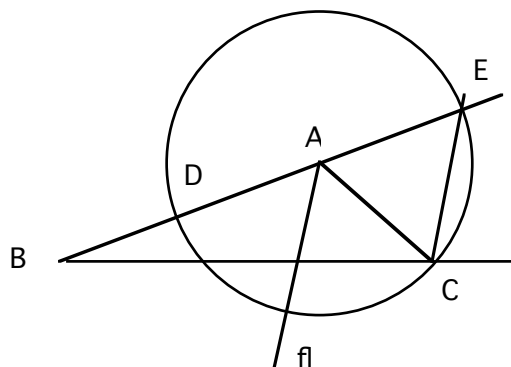
#### Enoncé

ABC est un triangle tel que  $AB > AC$ .

Le cercle  $c$  de centre A et de rayon AC coupe la droite (AB) en D et E.

On mène par A la droite  $\Delta$  parallèle à la droite (CE).

**Démontrer que  $\Delta$  est la médiatrice du segment [DC].**



La séquence est décrite dans la fiche-professeur de la page suivante.

# "REDIGEZ EN LIBERTE"

## FICHE PROFESSEUR

L'objectif de cette activité est de faire sentir aux élèves toutes les libertés qu'ils ont pour écrire une démonstration, mais aussi toute la rigueur qui est nécessaire dans l'usage des mots qui servent à l'articulation du texte.

**Durée** : Il faut prévoir environ deux heures de travaux dirigés et une heure et demie en classe complète.

**Matériel à prévoir** : Affiches ou transparents, feutres.

### **PREMIERE SEANCE :**

Production des affiches (1 h en travaux dirigés)

- Exposer le but et le déroulement de l'activité.
- Répartir les élèves par groupes de 3 ou 4 élèves.
- Distribuer un texte de problème par élève.
- Consigne : chaque groupe rédige une démonstration avec le plus de soin possible sur une affiche (ou un transparent).

### **DEUXIEME SEANCE :**

Débat sur les affiches (30 min à 1 h en classe complète)

- Organiser un débat sur les différentes rédactions des élèves : ces derniers critiquent les différentes rédactions apparaissant sur les affiches.
- Eviter si possible d'intervenir ou de donner une indication sur les remarques faites par les élèves ; par contre on pourra noter ces dernières sur le support utilisé.
- A la fin de la séance, leur dire de rédiger individuellement, pour la fois suivante, une solution utilisant le triangle isocèle.

### **TROISIEME SEANCE :**

Reconnaître les théorèmes (1 h en travaux dirigés)

- Objectif : obliger les élèves à tout lire attentivement, faire apparaître les différentes formulations d'un théorème et leur faire découvrir qu'un théorème peut être utilisé sans être énoncé.
- Travail en groupes (les mêmes qu'à la première séance).
- Distribuer à chaque élève les fiches "Rédigez en liberté" (voir pages suivantes).
- Prévoir 30 min pour la lecture du texte de la rédaction N° 5 et la production d'une feuille par groupe, relevée à la fin de l'heure et sur laquelle apparaissent les réponses aux questions 1-a)b)c). Le bilan sera fait à la séance suivante.
- A la fin de la séance, demander aux élèves de rédiger une réponse à la deuxième question qui sera discutée en classe entière la fois suivante.

### **DERNIERE SEANCE :**

Débat et bilan (1 h en classe complète)

- Le professeur rappelle les résultats obtenus dans les différents groupes. Il doit mettre en évidence que tous les théorèmes sont présents dans chaque rédaction, indépendamment de la forme utilisée. Si cet objectif n'est pas atteint pour certains élèves, il est préférable de laisser le débat en suspens pour le reprendre un peu plus tard, par exemple en module.
- Pour le débat concernant la question 2) de la fiche élève, voici quelques points que nous avons voulu faire apparaître :
  - \* objectif annoncé ou non.
  - \* ordre dans un pas de démonstration : cause-conséquence (emploi du donc, on en déduit que...) ou conséquence-cause (emploi du car, en effet, ...).
  - \* usage ou non des symboles.
  - \* théorèmes plus ou moins explicites.
  - \* pas de démonstration plus ou moins séparés.
  - \* ordre global différent (conclusion en début dans la rédaction N° 2).
  - \* textes assez courts pour les deux.
  - \* vocabulaire peu varié pour les deux.

## "REDIGEZ EN LIBERTE"

Voici dix rédactions de la même démonstration. Votre travail est le suivant :

- 1 -
  - a) Citez tous les théorèmes utilisés dans la rédaction N° 5.
  - b) On s'intéresse au premier théorème rencontré dans cette rédaction. Quelles sont les rédactions dans lesquelles ce théorème est utilisé ?
  - c) Refaites le même travail pour chacun des autres théorèmes.
- 2- Comparez les rédactions N° 1 et N° 2 en exprimant les ressemblances et les différences sous forme de phrases bien rédigées.

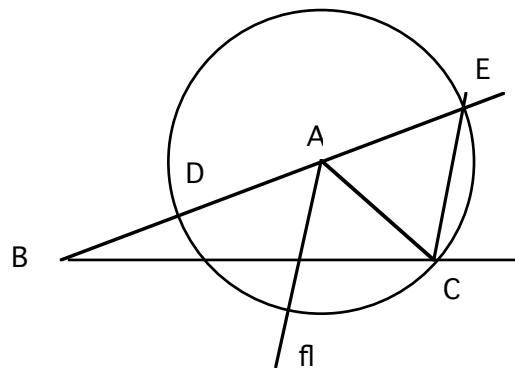
Exemple : Dans la rédaction N° 1, on démontre que [ED] est un diamètre alors que dans la rédaction N° 2, on l'admet sans démonstration.

### Enoncé

ABC est un triangle avec  $AB > AC$ .

Le cercle  $c$  de centre A et de rayon AC coupe la droite (AB) en D et en E. On mène par A la droite  $\Delta$  parallèle à (CE).

Démontrer que  $\Delta$  est la médiatrice du segment [CD].



### Rédaction N° 1

La droite (DE) passe par le centre A du cercle  $c$ , donc les points D et E sont diamétralement opposés.

Le triangle DCE est inscrit dans le cercle de diamètre [ED] ; il est donc rectangle en C. On a donc :  $(CE) \perp (CD)$ . Or  $\Delta \parallel (CE)$ , donc  $\Delta \perp (CD)$ .

Dans le triangle ACD, isocèle en A car  $AC = AD$  (rayon du cercle), la droite  $\Delta$  est

hauteur, donc également médiatrice de [CD].

### Rédaction N° 2

Pour démontrer que  $\Delta$  est la médiatrice de [CD], je vais prouver que ACD est un triangle isocèle et que  $\Delta$  est une hauteur de celui-ci.

\* ACD est isocèle car C et D sont des points du cercle  $c$  de centre A.

\*  $\Delta$  est perpendiculaire à (CD) : en effet  $\Delta$  est parallèle à (EC) et (EC) est perpendiculaire à (CD) car C est un point du cercle de diamètre [ED].

### Rédaction N° 3

Montrons d'abord que (EC) est perpendiculaire à (CD) : comme les points E et D sont les points d'intersection de la droite (AB) avec le cercle  $c$  de centre A, [ED] est un diamètre de  $c$ , alors en joignant le point C, situé sur le cercle, aux extrémités du diamètre [ED], on obtient un triangle rectangle en C. On a donc (EC) perpendiculaire à (CD).

Montrons que  $\Delta$  est la médiatrice de [CD].

Les deux droites  $\Delta$  et (EC) étant parallèles et (EC) étant perpendiculaire à (CD), on en déduit que  $\Delta$  est perpendiculaire à (CD).

De plus le triangle ACD est isocèle de sommet A puisque [AC] et [AD] sont des rayons du cercle  $c$ ; on en conclut que  $\Delta$ , hauteur du triangle ACD, est aussi médiatrice de [CD].

### Rédaction N° 4

[ED] est un diamètre de  $c$   
C est un point de ce cercle                      donc (EC)  $\perp$  (CD)

(EC)  $\perp$  (CD) et  $\Delta //$  (EC)                      donc  $\Delta \perp$  (CD)

Dans le triangle ACD  
AC = AD (rayon du cercle)                      donc ACD est isocèle en A

$\Delta$  est la hauteur issue de A                      donc :  $\Delta$  est la médiatrice de [CD]  
ACD est isocèle

### Rédaction N° 5

Démontrons d'abord que  $\Delta$  est perpendiculaire à (CD).

Le segment [DE] est un diamètre du cercle  $c$  et C est un point de ce cercle, or on sait qu'un triangle formé par un point d'un cercle et les extrémités d'un diamètre est rectangle et a pour hypoténuse ce diamètre. On peut donc en déduire que le triangle CED est rectangle en C et ainsi (EC) et (CD) sont perpendiculaires.

Par hypothèse nous savons aussi que (EC) et  $\Delta$  sont parallèles ; or lorsque deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre. Par conséquent  $\Delta$  est perpendiculaire à (CD).

Prouvons maintenant que  $\Delta$  est la médiatrice de [CD].

Le triangle ACD est isocèle de sommet A, car [AC] et [AD] sont des rayons du cercle, de plus  $\Delta$  étant perpendiculaire à (CD) est la hauteur relative à la base. Or, dans un triangle isocèle, la hauteur relative à la base est aussi la médiatrice de cette base.

Ainsi  $\Delta$  est la médiatrice de [CD].

### Rédaction N° 6

Pour démontrer que  $\Delta$  est la médiatrice de [DC], notons d'abord que CDA est un triangle isocèle de sommet A car  $AC = AD$  (rayon du cercle).

D'autre part :

$(CE) \perp (CD)$                       car CED étant un triangle inscrit dans un demi-cercle de diamètre [ED] est rectangle en C.

$(CE) // \Delta$                       par hypothèse.

Par suite  $\Delta \perp (CD)$  ; donc  $\Delta$  est la hauteur du triangle isocèle CAD relative à la base [CD] ; alors dans ce triangle isocèle CAD, la hauteur  $\Delta$  est aussi la médiatrice de [CD].

### Rédaction N° 7

Démontrons que dans le triangle ACD, qui est isocèle en A, puisque [AC] et [AD] sont des rayons de  $c$ , la droite ( $\Delta$ ) est la hauteur relative à [CD].

\* Le triangle ECD est rectangle en C car il est inscrit dans le cercle  $c$  et [DE] est un diamètre de  $c$ . Par conséquent (EC) est perpendiculaire à (CD).

\*  $\Delta$  étant parallèle à (EC) est donc perpendiculaire à (CD) : c'est donc la hauteur relative à [CD] dans le triangle ACD.

Dans un triangle isocèle, la hauteur relative à la base est la médiatrice de cette base : donc  $\Delta$  est la médiatrice de [CD].

### Rédaction N° 8

Le triangle EDC est rectangle en C car il est inscrit dans le cercle de diamètre [ED].

De plus  $\Delta$  est perpendiculaire à (CD) ; en effet les droites (EC) et  $\Delta$  sont parallèles et (CD) est perpendiculaire à (EC).

$\Delta$  est donc la médiatrice de [CD] car elle est la hauteur issue de A du triangle ACD qui est isocèle de sommet A.

### Rédaction N° 9

[ED] étant un diamètre de  $c$  et C un point de ce cercle, on a donc (EC) perpendiculaire à (CD).

Comme (EC) est perpendiculaire à (CD) et  $\Delta$  parallèle à (EC), on a donc  $\Delta$  perpendiculaire à (CD).

Dans le triangle ACD, AC et AD sont égales (rayon du cercle), on a donc : ACD est isocèle de sommet A.

$\Delta$  est la hauteur issue de A et ACD est isocèle, on a donc :  $\Delta$  est la médiatrice de [CD].

### Rédaction N° 10

Comme le triangle ECD est inscrit dans le cercle de diamètre [ED], il est rectangle en C. Donc la droite (EC) est perpendiculaire à la droite (CD).  $\Delta$  étant parallèle à (CE) est perpendiculaire à (CD) d'après le théorème : "si deux



droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre".

Or C et D sont deux points du cercle  $c$  de centre A ce qui prouve que  $AC = AD$  et que le triangle ADC est isocèle de sommet A.

Par suite,  $\Delta$  étant la hauteur relative à la base [CD] du triangle isocèle ACD est en même temps la médiatrice de [CD].

## II - L'EXPLICATION DE NOS CHOIX

### 1 - Choix de la séquence

Nous avons opté pour le travail de groupes au départ pour être sûrs que le problème soit résolu par tous et pour permettre à chacun de participer à une rédaction de démonstration.

La discussion et la critique sont plus faciles sur des démonstrations produites par les élèves que sur celle de leur professeur. Cette discussion permettra à l'enseignant de découvrir rapidement les représentations implicites des élèves.

La difficulté, à la troisième séance, est de faire travailler les élèves sur les dix textes que nous proposons. Nous avons au départ posé la question sous la forme : "*Énoncez tous les théorèmes utilisés dans les démonstrations*", mais cette tâche était trop vague et trop vaste. Nous avons alors essayé de distinguer au niveau de la consigne, les théorèmes explicitement énoncés de ceux qui étaient sous-entendus ; mais il est très difficile de se faire comprendre. Il vaut mieux que cette remarque apparaisse au cours de la discussion.

### 2 - Choix des rédactions

Nous voulions faire comprendre aux élèves certaines libertés : on peut écrire le texte dans l'ordre que l'on souhaite ; on peut employer des mots de liaison variés, mettre la conclusion au début, développer les détails ou les sous-entendre, ajouter des indications heuristiques sur le but que l'on souhaite atteindre. On constate que, par exemple, l'idée qu'une démonstration commence obligatoirement par une donnée et se termine par la conclusion reste fortement ancrée chez quelques-uns.

Nous avons donc choisi des rédactions qui, à nos yeux, sont parfaitement correctes en faisant varier certains paramètres :

- ajout ou suppression de certains détails comme : "*[DE] passe par le centre, donc [DE] est un diamètre*".
- ordre : en remontant comme dans le texte 2, en descendant comme dans le texte 1, dans le désordre comme dans le texte 7.
- on annonce le résultat dans les textes 3 et 5.
- variété des mots de liaison : car, or, donc, en effet, comme, alors, on obtient, on en déduit, on en conclut, de plus on sait que, on peut donc en déduire, lorsque, notons d'abord que, utilisation du participe présent.
- le texte contient des symboles ou non.
- texte long ou texte court.

- structure apparente (texte 9) ou non (texte 10).
- énoncé explicite des théorèmes ou non.

### III - COMMENTAIRES SUR LE FONCTIONNEMENT DE L'ACTIVITE ET SUR LES PRODUCTIONS DES ELEVES

La première séance est réservée à la réalisation de l'affiche. Ce travail est très bien accueilli par les élèves qui s'y investissent avec sérieux. Lorsque cette activité est réalisée en début d'année, cela leur permet de se connaître plus vite et l'enseignant peut les cerner plus rapidement.

Pour certains groupes, une aide est nécessaire pour la recherche de la solution ; le manque d'efficacité de ces groupes s'explique, soit par l'apparition de conflit de pouvoir, soit par un travail uniquement individuel.

Les textes produits par les élèves sont en général de bonne qualité. On remarque qu'ils se montrent cependant assez négligents dans leur ponctuation quand ils écrivent eux-mêmes, par contre ils sont exigeants quand ils étudient les démonstrations des autres.

On y rencontre souvent des notations incorrectes, notamment pour les droites, les segments et les longueurs.

On y note des tournures maladroitement telles que : "*Un triangle inscrit dans un cercle, ayant pour côté le diamètre du cercle et le sommet sur le cercle est rectangle*". La signification du mot "*inscrit*" ne semble pas claire puisqu'il est précisé que le sommet est sur le cercle.

Certaines expressions sont discutables. Citons-en quelques-unes :

- " $\Delta$  est **la médiatrice du triangle ADC**".
- "*Comme ADC est isocèle en A et que  $\Delta$  est perpendiculaire à (DC), donc  $\Delta$  est une hauteur du triangle ADC en A. Et, comme **la** hauteur d'un triangle isocèle est en même temps **la** médiatrice, donc  $\Delta$  est la médiatrice de [CD]*". En effet, il y a plusieurs hauteurs !
- " *$\Delta$  est la hauteur issue de A, or dans un triangle isocèle la hauteur issue du sommet principal est aussi médiatrice du segment opposé. Donc  $\Delta$  est **hauteur et médiatrice du segment [CD]***".

Ces erreurs ne sont pas importantes mais elles peuvent cacher des fautes conceptuelles : **médiatrice du triangle**, [CD] est **le** diamètre du cercle.

Certains recopient l'énoncé (c'était imposé en troisième).

Certains n'emploient pas de mots de liaison.

Quant aux théorèmes, beaucoup sont énoncés correctement et, au moment de la confrontation à la deuxième séance, les énoncés incorrects sont rapidement repérés et rejetés avec des arguments de bonne qualité. Les fautes rencontrées sont de différents types :

- des énoncés faux : "*Tout triangle inscrit dans un cercle est rectangle*" ; "*Si deux droites sont perpendiculaires, toute parallèle à l'une l'est à l'autre*".
- des énoncés incomplets : "*Dans un triangle isocèle, la hauteur et la médiatrice sont confondues*", "*Tout triangle inscrit dans un demi-cercle est rectangle*".
- des énoncés surchargés : "*Dans un triangle isocèle, la hauteur partant du sommet principal est aussi la médiatrice, la médiane et la bissectrice de ce sommet*". Dans ce pas de démonstration, il suffisait de dire que la hauteur était médiatrice de la base. D'autre part, il faut noter que le statut des mots "médiatrice", "médiane", "bissectrice" n'est pas assimilé.
- des fautes fondamentales de résolution : "*La droite issue du sommet d'un triangle isocèle est en même temps la médiatrice, la bissectrice, la hauteur et la médiane, donc  $\Delta$  est la médiatrice*".
- une confusion entre théorème direct et réciproque : "*Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, elles sont parallèles*" au lieu de "*Si deux droites sont parallèles toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre*".
- des fautes de français : "*Tout triangle inscrit dans un demi-cercle dont un côté est un diamètre est rectangle*" ; "*Lorsqu'un triangle est inscrit dans un demi-cercle et dont un des côtés est le diamètre du cercle, alors ce triangle est rectangle*".

Dans l'ensemble, on peut penser que les structures du texte démonstratif sont presque acquises, puisque la plupart du temps, les pas comportent bien les données et la conclusion, introduites par des mots de liaison adaptés, sans stéréotype.

#### **IV - LE TRAVAIL DES ELEVES SUR LES DIX REDACTIONS (Troisième séance)**

##### ***1 - Les théorèmes de la rédaction 5***

Ils reconnaissent parfaitement les trois théorèmes utilisés dans cette rédaction. Certains énoncent comme théorèmes : "*Le centre d'un cercle est équidistant de tous les points de ce cercle*", "*Si deux points sont sur un cercle, ils sont équidistants du centre de ce cercle*", "*Tout triangle ayant deux côtés de même longueur est isocèle*", alors que la plupart distinguent théorème et définition.

Pour énoncer le théorème du triangle rectangle inscrit dans un demi-cercle, on constate que, en majorité, les élèves transforment de manière significative le texte de la démonstration (rédaction 5) pour en faire un énoncé, ce qui est le signe d'une certaine maîtrise de l'écriture d'énoncés. On note encore une bonne variété des formes utilisées.

Quand au théorème "Des droites perpendiculaires et parallèles", il est recopié ou légèrement modifié.

Le théorème de "La hauteur est médiatrice dans un triangle isocèle" est généralement recopié mais également complété par "médiatrice et bissectrice". L'introduction d'éléments inutiles dans le problème montre certainement une difficulté dans la compréhension de la structure d'un pas de démonstration.

## ***2 - Le théorème du triangle rectangle inscrit dans un demi-cercle***

Dans un premier temps, les élèves nomment beaucoup de rédactions, qui à leur avis, ne contiennent pas ce théorème, mais rapidement il y a de nombreux changements. Il semble que les premiers indices de repérage soient les mots du théorème: "cercle", "diamètre", "inscrit", "triangle".

Il y a un pas à franchir entre "triangle rectangle" et "droites perpendiculaires".

## ***3 - La comparaison des rédactions 1 et 2***

Pour beaucoup, la rédaction 2 ne comporte pas de conclusion ; il faudra institutionnaliser le fait que l'ordre dans la rédaction d'une démonstration n'est pas toujours : hypothèse, théorème, conclusion.

En début de classe de seconde, les élèves ont une préférence pour les rédactions longues où tous les théorèmes sont énoncés explicitement. Ils sont marqués par des formulations utilisées dans leur scolarité antérieure.

## **V - SUIVI DE CETTE EXPERIENCE**

Pour étudier l'impact qu'a eu cette activité sur les élèves, deux tests ont été proposés.

Dans deux classes, dès le mois d'octobre, une semaine après la correction orale d'un exercice, celui-ci a été repusé en interrogation écrite avec la consigne : "A rédiger avec soin et en liberté". Ce test a permis de juger la rédaction et non la démonstration puisque, par exemple sur une classe de 33 élèves, 22 ont réussi la démonstration, 9 ne sont pas allés jusqu'au bout et deux n'ont rien fait.

La rédaction est meilleure que d'habitude, elle est plus variée. Les indices de réussite sont :

- l'apparition plus nette des pas de la démonstration avec une meilleure utilisation des mots de liaison.
- l'annonce des objectifs de la démonstration par quelques élèves.
- l'utilisation par environ un tiers de la classe des théorèmes de façon instanciée et non explicite.
- le rappel plus fréquent des résultats antérieurs.

Dans une autre classe, l'exercice de l'activité : "*Rédigez en liberté*" est reproposé en interrogation écrite au mois d'avril ; les rédactions de quelques élèves "avant et après" ont été examinées. Des remarques identiques sont faites : le texte d'avril est généralement plus court ; les hypothèses qui étaient énoncées en début d'exercice, ne le sont plus, mais rappelées au moment utile. La structure de la démonstration est plus nette, l'organisation des pas plus variée. Il y a moins de propositions inutiles.

Bien sûr, il est difficile de généraliser ce constat et exagéré de faire preuve de trop d'optimisme. Tout ce travail est de longue haleine et ne peut pas toujours donner matière à des activités de ce type car les différentes parties du programme ne s'y prêtent pas nécessairement.

Il est d'autre part important de signaler que ce travail a été apprécié par nos élèves. En effet, tout au long de l'année, ils ont fréquemment fait référence à cette activité : "*Rédigez en liberté*".

## DEUXIEME ACTIVITE : "DEMONSTRATION A TROUS"

### I - OBJECTIFS

Cette activité permet d'appréhender l'organisation d'une démonstration qui n'est pas rédigée dans l'ordre et d'étudier la structure d'un pas.

En effet, on ne peut comprendre une démonstration que si on connaît les degrés de liberté que l'on a, grâce aux mots de liaison.

L'objectif de cette fiche est de faire découvrir aux élèves la rigueur nécessaire dans l'usage des mots servant à l'articulation du texte.

## DEMONSTRATION A TROUS

Voici un énoncé de problème :

ABCD est un parallélogramme de centre O (figure ci-contre).

ABEF et DCIJ sont des carrés situés à l'extérieur du parallélogramme ABCD.

**Démontrer que O est le milieu du segment [EJ].**

**Compléter la démonstration suivante :**

O est le milieu de [BD] ----- ABCD est un parallélogramme de centre O. Pour montrer que c'est aussi le milieu de [EJ], il ----- montrer que EBJD est un parallélogramme. Cette propriété sera bien vérifiée -----  $EB = DJ$  et  $(EB) \parallel (DJ)$ .

Montrons d'abord, par une suite d'égalités, que  $EB = DJ$ . ----- dans le carré ABEF, les côtés sont égaux et donc  $EB = AB$ . On démontrerait ----- dans le carré DCIJ, que  $DC = DJ$ . Enfin, ----- dans le parallélogramme ABCD  $AB = DC$ . Donc ----- .

Montrons maintenant que  $(EB) \parallel (DJ)$  : pour cela ----- que  $(AB)$  est parallèle à  $(CD)$  ----- ABCD est un parallélogramme. ----- ABEF et DCIJ sont des carrés,  $(DJ) \perp (DC)$  et  $(EB) \perp (AB)$ . -----  $(AB) \parallel (DC)$ , -----  $(DJ) \perp (AB)$  ----- "si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre".

On en déduit bien que  $(EB) // (DJ)$  en ----- le théorème : "si deux droites sont perpendiculaires à une troisième droite, elles sont parallèles".



## **II - MISE AU POINT DE LA FICHE**

Après un travail sur le texte lui même, les deux questions qui se sont posées ont été les suivantes :

- les élèves trouveront-ils les mots qui conviennent, ont-ils un vocabulaire suffisant, ce vocabulaire est-il disponible pour l'écriture d'une démonstration ?
- quelles modalités pédagogiques doit-on utiliser pour l'exploitation de la fiche ?

Pour cette deuxième question les expériences menées nous conduisent à la proposition du paragraphe III ci-après.

Pour éclairer la première question nous avons proposé deux versions de la fiche. Dans la première, la consigne était simplement de compléter la démonstration, dans la deuxième, les mots de liaison que nous voulions voir apparaître étaient proposés aux élèves. Les résultats de cette expérience nous ont conduits à deux conclusions :

- d'une part, il est évident que l'écrasante majorité des élèves de seconde maîtrise bien l'utilisation des mots de liaison dans le langage courant (ce n'est sans doute pas le cas en quatrième) et que devant ce texte de démonstration ils n'ont aucune difficulté à proposer des expressions très variées. Les erreurs viennent d'une utilisation non conforme aux statuts des propositions et non d'une difficulté de vocabulaire.
- d'autre part, la tâche est rendue beaucoup plus difficile pour les élèves quand on leur propose des mots de liaison, en particulier parce qu'une utilisation douteuse en début de texte de certaines expressions les conduit en fin de texte à des fautes grossières car ils veulent utiliser les expressions qu'il leur reste.

Les expressions auxquelles nous avons pensé sont : car, il suffit de, si, en effet, de même, on sait que, EB = DJ, notons, puisque, comme, mais, donc, d'après le théorème, appliquant.

## **III - LES CONDITIONS D'UTILISATION DE CETTE FICHE**

La fiche est proposée en travail de groupes. Cet aspect est essentiel ; en effet, un élève peut avoir des difficultés à trouver seul des mots qui lui paraissent adaptés pour certains des trous du texte, alors que cela ne se produit pas pour les groupes d'élèves .

Après un travail d'un quart d'heure à une demi-heure, l'enseignant ramasse les copies. Au cours d'une séance ultérieure proche, il fait une correction sous forme de débat. Pour cela il place sur un rétroprojecteur le texte à trous, puis il met une à une les réponses des élèves en commençant par les mauvaises et en demandant à chaque fois l'avis de la classe. L'expérience montre que les erreurs sont toujours relevées et que de bons arguments sont trouvés par les élèves. En une demi-heure environ l'accord se fait.

#### IV- ANALYSE DU TEXTE PROPOSE ET DES REPONSES DES ELEVES

Les trous correspondent à des expressions de liaison sauf le septième.

Le premier trou (O milieu de [BD] car ABCD est un parallélogramme de centre O) a conduit à beaucoup d'erreurs pour la fiche où les mots de liaison n'étaient pas proposés, et à une seule erreur dans l'autre cas. On peut interpréter ce fait : les élèves rencontrent si rarement dans les démonstrations des livres ou de leurs enseignants les mots "car" "parce que", "puisque", "en effet" qu'ils hésitent à les utiliser.

Dans le deuxième trou, (pour montrer que c'est aussi le milieu de [EJ] il suffit de montrer que ...) le mathématicien attend "il suffit de". Mais on sait que dans le langage courant l'expression "il faut" viendrait aussi naturellement. Cette deuxième expression correspond en effet à la démarche heuristique que l'on pourrait paraphraser : "la bonne méthode, la méthode naturelle est de montrer". Au lieu de rejeter ce "il faut" sans appel, il semble préférable d'expliquer le sens qu'il peut avoir et les raisons qui font préférer "il suffit" au mathématicien dans une démonstration. Les réponses des élèves confirment cette analyse : il n'y a aucune faute pour la fiche avec les mots, alors que dans l'autre fiche "il faut" est très largement majoritaire.

Pour le troisième trou, (Cette propriété sera bien vérifiée si  $EB = DJ$  et  $(EB) // (DJ)$ ), une première lecture peut conduire à "car". Un seul indice contre ce mot se trouve avant le trou : le futur dans "cette propriété sera". Mais cet indice n'est pas décisif car les négligences de temps dans les démonstrations d'enseignants ne sont pas rares. C'est en fait la suite qui doit faire rejeter "car" au profit de "si". En effet on y démontre longuement que  $EB = DJ$  et que  $(EB) // (DJ)$ , et donc ces deux propositions ne sont pas considérées à cet endroit de la démonstration comme acquises. Le fait que moins du quart des élèves fassent la faute attendue montre que la maîtrise du français et de la démonstration n'est pas loin d'être acquise.

Le quatrième trou (En effet, dans le carré ABEF, les côtés sont égaux et donc  $EB = AB$ ) est l'objet de peu d'erreurs.

Presque la moitié des élèves emploient pour le cinquième trou (On démontrerait de même dans le carré DCIJ, que  $DC = DJ$ ) "donc" ou "en effet". Ici encore on peut penser que cette erreur est favorisée par une vue trop stéréotypée de la démonstration. Une démonstration est une suite de déductions et sa structure est de ce fait linéaire. L'expression "de même" indique au contraire une démarche parallèle. Il est fréquent au collège que ce type de démarche soit dissimulé par la globalisation de deux pas de démonstrations en un seul, ce qui donnerait ici : "Dans les carrés ABEF et DCIJ les côtés sont égaux, donc  $EB = AB$  et  $DC = DJ$ ". R. DUVAL a noté qu'en quatrième cette globalisation est pour certains un obstacle à la compréhension de la structure des démonstrations.

Les erreurs dans le cinquième et le sixième trous (enfin, on sait que dans le parallélogramme ABCD,  $AB = DC$ ) semblent étroitement liées ; par exemple "en effet" est suivi de "de même". Notons cependant l'emploi de "que" dans le sixième trou, qui aurait dû être défavorisé par le point.

Il y a très peu d'erreurs dans le septième trou.

Le huitième et le neuvième trous sont liés (Pour cela notons que (AB) est parallèle à (CD) puisque ABCD est un parallélogramme). Il y a très peu d'erreurs pour la fiche sans mot. Les erreurs pour la fiche avec mots s'expliquent sans doute par la nécessité de ne pas réutiliser certains termes. La même situation se produit pour les treizième et quatorzième trous (D'après le théorème "si deux ... et en appliquant le théorème ...).

Les difficultés constatées pour les trous 10, 11 et 12 (comme ABEF et DCIJ sont des carrés,  $(CD) \perp (DC)$  et  $(EB) \perp (AB)$ ). Mais  $(AB) \parallel (DC)$ , donc  $(DJ) \perp (AB)$ ) s'expliquent de deux façons : d'une part, le pas de démonstration correspondant au théorème cité est particulièrement complexe puisqu'il comporte trois données. D'autre part, les trois pas préliminaires qui permettent d'obtenir ces trois données ne sont pas complètement isolés dans le texte. Cela conduit à des fautes graves comme l'utilisation devant  $(DJ) \perp (AB)$  de "si" ou de "mais" qui transforme cette conclusion en une donnée. Le débat clarifie aisément cette situation.

L'absence de conclusion "O est donc bien le milieu de [EJ]" est volontaire. Il est fréquent en effet de rencontrer des démonstrations où le résultat est énoncé avant et n'est pas répété à la fin. C'est à l'occasion du débat que cela pourra être expliqué aux élèves, en précisant sans doute que pour eux il est préférable de redire la conclusion.

Le mot "mais" est souvent mal utilisé, surtout dans la fiche avec les mots. Il est vrai que ce mot est peu utilisé au collège, dans les démonstrations.

Certains élèves sont gênés par la ponctuation et la grammaire. Quelques phrases n'ont pas de verbe. Il faut dire que certains collègues, de lycée comme de collège, écrivent leurs démonstrations en style télégraphique.

En conclusion trois faits sont particulièrement évidents :

- les élèves sont souvent prisonniers d'une tournure de démonstration et cela les conduit à des fautes.
- certains mots sont moins connus des élèves et demandent une mise au point.
- les élèves sont capables en seconde de faire des progrès très rapides dans la rédaction des démonstrations si on analyse avec eux les obstacles qu'ils rencontrent.

## **V - LES EFFETS DE CETTE FICHE**

Il semble que cette fiche modifie de manière très sensible les comportements des élèves. Ils écrivent des démonstrations moins stéréotypées et avec beaucoup moins de fautes.

Un résultat inattendu est l'effet sur les enseignants. Les conditions actuelles de l'enseignement les conduisent en effet tout naturellement à s'enfermer peu à peu dans des formes de démonstrations très stéréotypées. Le travail avec les élèves sur cette démonstration

leur redonnent le goût de la liberté d'expression, et il semble que cela contribue à améliorer les performances des élèves.

### TROISIEME ACTIVITE : "VERS UNE DEMONSTRATION PARFAITE"

Lorsque nous corrigeons des copies, nous nous demandons ce que l'élève va pouvoir retenir au moment de la correction. Beaucoup d'entre eux attendent la note et regardent les remarques formulées sans trop de sérieux !

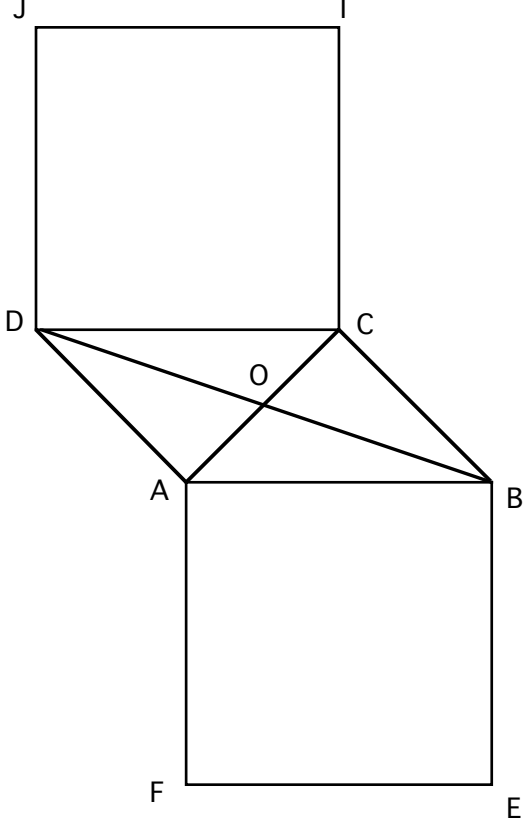
Aussi, pour un élève qui a visiblement compris le problème posé mais dont la démonstration est très incomplète, ne pourrait-on pas lui demander de faire un schéma de sa démonstration, lui montrer ses défauts sur ce schéma puis lui faire réécrire et éventuellement lui faire recommencer jusqu'à ce qu'elle soit "parfaite" ?

Le risque est de se heurter souvent à la lassitude des élèves dans cette démarche. C'est pourquoi, il ne faut pas hésiter à transformer cette tâche en une activité comme celle que nous allons décrire ci-dessous, activité qui peut se présenter au sujet de l'exercice traité au chapitre I ou de la démonstration à trous :

ABCD est un parallélogramme de centre O (figure ci-contre).

ABEF et CDJI sont des carrés situés à l'extérieur du parallélogramme ABCD.

**Démontrer que O est le milieu du segment [EJ].**



Voici la copie d'un élève (première rédaction)

$$\vec{AB} = \vec{DC} \text{ (texte)}$$

Donc FEBA et DCIJ sont deux carrés isométriques et donc :

$\vec{DJ} = \vec{EB}$  donc DJBE est un parallélogramme et [BD] et [EJ] sont des deux diag comme elles se coupent en leur milieu et que O est le milieu de [BD], O est le milieu de [EJ]

Une séance de travaux dirigés a été consacrée à l'étude de cette démonstration par l'ensemble des élèves de la classe. Chacun d'eux en a eu une photocopie et il a été précisé que le but cherché, à savoir "O milieu de [EJ]" était atteint avec rigueur mais que par contre, il y avait trop d'affirmations non démontrées au départ.

Après cinq minutes de réflexion personnelle, le débat a pu être engagé. Les remarques ont été très diverses, de "e au lieu de E", "diag." jusqu'à "pourquoi as-tu affirmé que  $\vec{DJ} = \vec{EB}$  ?" en passant par : "que signifie : (texte) ?"

Au fur et à mesure de la discussion, l'élève qui avait produit cette copie a pu apporter les renseignements demandés avec l'aide de certains autres. Après quinze minutes environ, les élèves ont été regroupés par trois et ont eu une vingtaine de minutes pour mettre au point une rédaction commune. Le principal intéressé a tenu à rendre la copie personnelle suivante :

Comme ABCD est un parallélogramme :

$$\vec{AB} = \vec{DC}$$

donc (AB) et (DC) sont parallèles.

- Comme FEBA et DCIJ sont deux carrés :

Dans FEBA : (EB) et (AB) sont perpendiculaires,

et dans DCIJ : (DJ) et (DC) sont perpendiculaires.

- Or deux droites, (EB) et (DJ) perpendiculaires à deux droites parallèles, (AB) et (DC), sont parallèles.

- Comme (EB) et (DJ) sont parallèles et que les deux carrés ABEF et DCIJ sont isométriques (puisque  $AB = DC$ ), alors  $\vec{EB} = \vec{DJ}$ .

Donc DJBE est un parallélogramme et [DB] et [EJ] sont ses deux diagonales ; comme elles se coupent en leur milieu et que O est le milieu de [DB] donc O est le milieu du segment [EJ].

Cette expérience a pu se dérouler avec profit car l'élève était demandeur et son comportement au sein de la classe très positif. Il est bien sûr difficile de généraliser une telle activité mais intéressant de savoir que des occasions semblables peuvent se présenter à nous à n'importe quel moment de l'année.