La diversité des points de vue

La démonstration est sans doute le domaine des mathématiques où la diversité des points de vue constitue le plus grand obstacle à l'apprentissage. Nous avons déjà vu dans le chapitre 1 que même ceux des enseignants étaient très variés. Cette diversité résulte en particulier des contraintes auxquelles les enseignants se sentent soumis et qu'ils imposent, en retour, à leurs élèves. Nous en parlerons dans le premier paragraphe.

Comment les élèves vont-ils pouvoir se construire, dans ces conditions une idée solide et cohérente de ce qu'est la démonstration ? Toutes nos observations montrent bien que ce n'est pas parce que l'élève de seconde ne sait pas raisonner qu'il a des difficultés en mathématiques, mais plutôt parce qu'il ne comprend pas la forme de la rationalité des mathématiques. C'est pourquoi le travail essentiel est de la lui faire mieux comprendre. Un discours normatif est ici de peu d'efficacité. Si l'on veut éviter les discussions superficielles, il nous parait indispensable de se donner des moyens d'analyse. C'est l'objet du paragraphe 2. Le dernier paragraphe essayera de les utiliser pour comprendre les difficultés et les progrès des élèves.

I - DES CONTRAINTES POUR LES ENSEIGNANTS ET POUR LES ELEVES

La démonstration enseignée aujourd'hui en seconde se veut le reflet de la démarche du mathématicien moderne. En fait elle en diffère sensiblement. D'abord la règle qui veut que seuls les théorèmes déjà démontrés explicitement puissent être utilisés dans une démonstration est rarement respectée par le mathématicien qui s'autorise à utiliser tous les résultats que la communauté mathématique, à laquelle il s'adresse, est prête à accepter comme valide. Cela lui évite en particulier de démontrer des évidences. D'autre part, il n'est pas rare de rencontrer une grande liberté d'écriture : la démonstration est parsemée de considérations heuristiques, méthodologiques, historiques, les notations varient avec les auteurs, enfin beaucoup de pas de démonstrations sont à peine esquissés, beaucoup sont sous-entendus.

Cette différence est inévitable. Pour faire apparaître clairement aux yeux des élèves les particularités des textes démonstratifs, il est nécessaire de ne leur présenter que des textes dont les structures soient très apparentes. Cependant cela va entraîner des exigences vis-à-vis des élèves qui relèvent plus de contraintes sociales que de raisons réellement mathématiques. Ces exigences peuvent être institutionnelles, mais elles ne sont trop souvent que les lubies nuisibles de quelques-uns (enseignants, inspecteurs, correcteurs d'examens). Voici quelques exemples dont nous avons discuté :

1 - Les énoncés de théorèmes

Comme nous le notions plus haut, un élève rédigeant une démonstration en seconde n'a pas le droit d'utiliser un théorème qui n'a pas été explicitement énoncé pendant le cours. On comprend aisément la nécessité de cette contrainte, mais elle engendre deux types de difficultés.

D'une part les enseignants ne respectent pas toujours ce principe. Par exemple dans un problème de géométrie dans l'espace certains résultats seront admis sans démonstration, comme des résultats connus, alors que, rencontrés dans un problème plan, ils auraient fait l'objet d'une longue démonstration. Ainsi devant un cube sur lequel on a tracé la médiane d'une face on admettra que la longueur de cette médiane est égale au côté, alors que, dans la figure plane composée d'un carré et de sa médiane, le même résultat fera l'objet d'une démonstration (par exemple avec les vecteurs). En fait la rigueur vis-à-vis de ce principe évolue dans la scolarité. Par exemple en quatrième on fera une longue démonstration pour montrer qu'un trapèze isocèle admet un axe de symétrie, alors qu'en terminale on l'admettra sans problème. Que faire alors en seconde ?

D'autre part, certains énoncés de théorèmes sont rejetés par les uns et acceptés par les autres. Par exemple la réciproque du théorème des milieux qui s'énonce :

"*si* $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ *et si I est sur [AB] et J sur [AC],*
alors I et J sont les milieux de [AB] et [AC]"

est souvent proposée par les élèves, alors qu'elle est considérée comme hors programme. Cependant nous nous sommes aperçus que quelques enseignants l'énoncent explicitement, à l'occasion de la résolution d'un problème. Les élèves vont-ils être gênés par cette incohérence ? En tout cas elle peut jouer un rôle institutionnel très grave puisque, le jour du bac, une copie utilisant cette réciproque peut être sanctionnée ou non.

2 - L'ordre de la démonstration

Beaucoup d'enseignants pensent qu'une démonstration doit être rédigée "dans l'ordre". C'est ajouter une contrainte très artificielle. D'une part, l'utilisation du "car" ou du "parce que" est très naturelle chez les élèves et souvent performante. D'autre part, écrire des démonstrations dans l'ordre peut conduire les élèves à utiliser des mots de liaison peu variés et cela ne contribue pas à leur faire comprendre toute l'importance dans les démonstrations du statut des propositions.

3 - Les notations

Les notations que nous utilisons actuellement sont évidemment des conventions. Elles ont changé et elles changeront encore. Par exemple, il y a une trentaine d'années la notation AB pouvait désigner indifféremment le segment, la droite ou la distance. C'est pourquoi de nombreuses fautes de notations des élèves ne peuvent pas être considérées comme de véritables erreurs mathématiques. Mais on sait aussi que la maîtrise des notations est une aide pour éviter certaines erreurs et pour clarifier certains concepts. Il n'est donc pas étonnant que les enseignants aient des attitudes très diverses qui vont d'une rigueur sans faiblesse à une grande tolérance. La solution est peut être dans une attitude plus nuancée qui sait distinguer les fautes graves des négligences sans conséquence : par exemple écrire [AB] // [CD] au lieu de (AB) // (CD) est sans doute une erreur anodine ; par contre "*I est le milieu de (AC)*" peut être le signe d'une confusion essentielle entre la droite et le segment. De même, comprendre que les expressions "*OA est le rayon du cercle*" et "*[OA] est un rayon du cercle*" n'ont pas le même sens, peut être très important pour la compréhension d'un énoncé.

4 - Les usages

Il est normal que beaucoup d'usages dépendent de chaque enseignant. Par exemple, pour l'application du théorème des milieux, on verra certains enseignants dans certaines classes demander systématiquement d'indiquer le triangle dans lequel le théorème est appliqué, pendant que d'autres ne l'exigeront pas.

Par contre, nous pensons qu'il faut condamner fermement toutes les règles très artificielles imposées par quelques-uns. Par exemple, nous ne pouvons être d'accord avec un enseignant qui déclare qu'il mettra zéro à toute démonstration qui ne respecte pas des consignes du genre :

- "*l'hypothèse doit être soulignée en rouge et la conclusion en vert*".
- "*il faut écrire toutes les données du problème avant de commencer la démonstration, il faut les numéroter*".
- "*quand on nomme un triangle rectangle il faut mettre le sommet de l'angle droit en premier*".
- "*quand on nomme un triangle isocèle c'est le sommet commun aux deux côtés égaux qu'il faut nommer en premier*".

De la même manière on ne peut accepter que certains enseignants introduisent sans précautions des notations inusuelles ; par exemple "$I = m\ [AB]$ " pour "*I est le milieu de [AB]*", ou encore "$\overrightarrow{AB} = (1,2)$" pour "*les coordonnées de* $\overrightarrow{AB}$ *sont (1;2) dans le repère* $(O, \vec{i}\ , \vec{i}\ )$" ne sont pas des notations suffisamment fréquentes pour qu'on puisse les utiliser dans l'énoncé d'un contrôle. Remarquons pour cette dernière notation que $\overrightarrow{AB}$ = (1,2) peut conduire après un changement d'unité à $\overrightarrow{AB}$ = (2,4), puis à (1,2) = (2,4) formule évidemment troublante ; d'autre part, la notation (1,2) peut être lue comme un nombre décimal, ce qui conduit à préférer (1;2), enfin l'ordre des composantes doit respecter celui choisi pour le repère.

Citons encore des notations à éviter, ne serait-ce que pour tenir compte du rejet violent de certains correcteurs d'examens : cela peut aller de notations inattendues comme "$\widehat{ABC}$ " pour "*le triangle ABC*" à des problèmes plus profonds comme l'emploi de "$(x^2)' = 2x$" pour "*la dérivée de la fonction* $x \mapsto x^2$ *est la fonction* $x \mapsto 2x$". Beaucoup d'enseignants n'hésitent pas à faire ce dernier abus quand il y a beaucoup de notations ou de calculs. Il faut dire que le plus souvent il n'y a pas d'ambiguïté sur ce que cela signifie. Notons cependant que, dans un tel contexte, l'utilisation de"*cos*'*x*" et "*exp*'*x*" pour désigner la valeur de la dérivée du cosinus et de l'exponentielle en x, peut conduire certains élèves à écrire "*cos*'2*x*" ou "*exp*'2*x*" pour désigner les dérivées des fonctions x $\mapsto$ cos 2x et x $\mapsto$ exp 2x, alors que selon les usages ces notations désignent plutôt les valeurs des dérivées du cosinus et de l'exponentielle au point 2x.

Il y a malheureusement beaucoup de cas où la communauté enseignante est plus partagée, même si les recommandations des programmes essaient de lever les ambiguïtés. Citons, en particulier, quelques problèmes posés par l'énoncé d'une inégalité : les instructions officielles indiquent que "$x < y$" doit se lire "*x est strictement inférieur à y*" et que "$x \leq y$" doit se lire "*x est inférieur à y*". Il n'empêche que beaucoup d'enseignants et beaucoup d'élèves liront la seconde inégalité : "*x est inférieur ou égal à y*" et que "*moins de 10 francs*" voudra dire pour la plupart "< 10" même si le strictement n'est pas explicitement exprimé. De même l'expression "*demi-plan*" ou "*demi-droite*" est parfois comprise comme "*demi-plan fermé*" ou "*demi-droite fermée*", parfois "*demi-plan ouvert*" ou "*demi-droite ouverte*". L'emploi des mots "*égal*" et "*isométrique*" est aussi l'objet de bien des discussions.

Citons encore un dernier exemple : si tout le groupe est tombé d'accord pour dire que le passage de $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{4}\ \overrightarrow{AB}$ à $\overrightarrow{FB} = \frac{1}{4}\ \overrightarrow{AB}$ est une évidence qui ne demande pas de justification, il ne nous a pas paru évident de répondre à la question : "*faut-il demander une justification dans le cas où on déduit* $\overrightarrow{FB} = \frac{1}{4}\ \overrightarrow{AB}$ *de la formule* $3\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{AF}$ *?*"

Il est donc clair que chacun doit réfléchir à ses exigences pour voir si elles ont un véritable fondement mathématique ou si elles résultent simplement de contraintes sociales. Un élève ne peut être que rassuré si on lui explique clairement qu'une correction dont il ne comprend pas le bien fondé est légitimée par des raisons de convenances ou de commodité, voire d'efficacité dans la communication, et non à cause d'une faute mathématique.