Quand les élèves arrivent en seconde, ils sont capables d'écrire, pour un problème dont ils ont compris la solution, un texte qui ressemble à une démonstration. Mais il reste un travail important à faire auprès de beaucoup d'entre eux pour surmonter leurs difficultés à écrire un texte satisfaisant.

Pour que ce travail soit possible, il faut que les élèves aient les moyens de savoir ce qu'est "un texte satisfaisant" et leurs références en ce domaine sont les démonstrations des enseignants.

Malheureusement, les enseignants ne sont pas d'accord sur ce que l'on attend des élèves. En effet, quand on demande à des enseignants de mathématiques de rédiger une démonstration qui puisse servir de modèle à leurs élèves, on est très surpris par la diversité du résultat. Les uns produisent un texte de français sans aucun symbole, les autres un schéma de texte où les propositions sont reliées par des flèches ou des accolades. Les uns décrivent les étapes dans tous leurs détails et les autres rédigent un texte très court ne contenant que quelques éléments essentiels à leurs yeux. Les uns respectent scrupuleusement un certain ordre des propositions alors que les autres préfèrent commencer par la conclusion. Les uns font des textes sans aucun commentaire et les autres n'hésitent pas à y ajouter des commentaires heuristiques.

On est encore plus surpris par la vigueur des jugements portés par les uns sur la démonstration des autres : *"Ce n'est pas une démonstration !"* ou bien : *"A quoi sert tout ce baratin ?"* en passant par : *"Il faudrait peut-être écrire en français !"*...

Il y a derrière cela deux conceptions qui s'affrontent : les uns demandent implicitement une rédaction qui donne suffisamment d'indices pour savoir si l'élève a bien résolu le problème, les autres exigent au contraire un texte rigoureusement déductif.

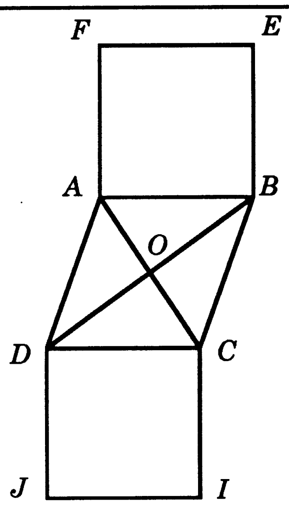
Nous avons découvert ces importantes disparités en demandant, à des collègues de lycées, de *"rédiger une démonstration de l'exercice suivant adaptée à un élève entrant en seconde"* ; une vingtaine d'entre eux ont répondu.

-Hypothèses ** ABCD est un parallélogramme de centre O*

** ABEF et CDJI sont des carrés.*

Démontrer que O est le milieu du segment [EJ]

(Sans utiliser de symétrie) [1]



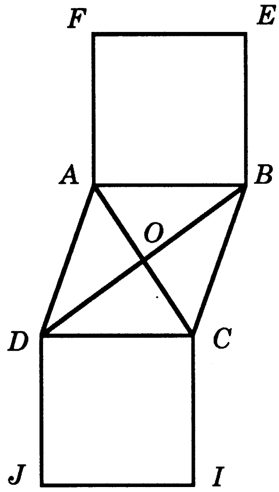
[1] Précision donnée, uniquement pour réunir des démonstrations comparables.

I - DES REDACTIONS QUI NOUS PARAISSENT SATISFAISANTES

Parmi les rédactions que nous ont proposées nos collègues, plusieurs nous ont paru correspondre à l'idée de "modèle" pour les élèves.

Nous en citons cinq en faisant apparaître la diversité des styles et les avantages de cette diversité du point de vue de l'apprentissage de la démonstration.

Copie A



* *(BE) est perpendiculaire à (AB) et (DJ) est perpendiculaire à (DC). Comme ABCD est un parallélogramme, (AB) et (CD) sont parallèles donc (BE) et (DJ) sont parallèles.*

* *ABCD est un parallélogramme donc AB = DC*
ABEF est un carré donc AB = BE } *par suite BE = DJ*
DCIJ est un carré donc DC = DJ

Les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ *et* $\overrightarrow{DJ}$ *ont des supports parallèles, ont même longueur et sont de sens contraires donc* $\overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{DJ}$ *ou* $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{JD}$ *ce qui prouve que BEDJ est un parallélogramme.*

Les diagonales [EJ] et [BD] ont le même milieu.
Comme O est le milieu de [BD], c'est celui de [EJ].

Copie B

Dans le carré FEBA, (EB) $\perp$ *(AB).*

Dans le parallélogramme ABCD, (AB) // (DC).

La droite (EB) est donc perpendiculaire à (DC).

Dans le carré DCIJ, (DJ) $\perp$ *(DC). Les droites (EB) et (DJ) étant perpendiculaires à une même droite, sont parallèles.*

EB = AB (côtés du carré AFEB).
AB = DC (côtés opposés du parallélogramme ABCD).
DC = DJ (côtés du carré DCIJ).

On en déduit : DJ = EB.

Les vecteurs $\overrightarrow{EB}$ *et* $\overrightarrow{DJ}$ *ont même direction, même longueur et même sens d'après la construction : ils sont égaux.*

Le quadrilatère DJBE est un parallélogramme ; ses diagonales [EJ] et [DB] ont même milieu. O étant milieu de [BD], diagonale du parallélogramme ABCD, est aussi milieu de [EJ].

Dans la première, les théorèmes ne sont pas énoncés mais sont implicites, dans la seconde un théorème est sous-entendu et l'autre instancié, c'est-à-dire énoncé dans le cas particulier où on l'applique.

C'est là un sujet d'inquiétude pour les élèves entrant en seconde : faut-il ou non énoncer les théorèmes utilisés ?

Nous croyons qu'on a, en effet, une certaine liberté dans ce domaine ; il faut sans aucun doute énoncer ou suggérer les théorèmes les plus importants de la démonstration mais il n'est pas obligatoire de tous les énoncer.

Dans la copie suivante, nous avons apprécié les mots de liaison qui permettent de distinguer plus aisément causes et conséquences et de rompre la monotonie de la rédaction.

Copie C

1) Montrons que $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{DJ}$.
ABEF et CDJI étant des carrés
$(EB) \perp (AB)$.
$(DJ) \perp (DC)$.

Or (AB) // (DC), le quadrilatère ABCD étant un parallélogramme.

On en déduit que <u>(EB) // (DJ)</u> et donc que $\overrightarrow{EB}$ a même direction que $\overrightarrow{DJ}$

ABEF étant un carré EB = AB

De même CDJI étant un carré DJ = DC

Or DC = AB comme longueur des côtés opposés [DC] et [AB] du parallélogramme ABCD.

Donc <u>EB = DJ</u> $\overrightarrow{EB}$ a même longueur que $\overrightarrow{DJ}$

De plus par construction <u>$\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{DJ}$ ont le même sens.</u>

Les vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{DJ}$ ont même direction, même longueur et même sens. On en déduit qu'ils sont égaux et par conséquent EBJD est un parallélogramme.

On sait que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

Par conséquent O est le milieu de la diagonale [BD] du parallélogramme ABCD.

[BD] est aussi une diagonale du parallélogramme EBJD.

Donc O milieu de [BD] est également <u>milieu de [EJ].</u>

Copie D

Dans le parallélogramme ABCD, on a : AB = DC et (AB) // (DC).
Dans le carré ABEF, on a : AB = BE et $(AB) \perp (BE)$
Dans le carré CDJI, on a : DC = DJ et $(DC) \perp (DJ)$

On a donc : BE = DJ

Les droites (BE) et (DJ) qui sont respectivement perpendiculaires aux droites parallèles (AB) et (CD) sont elles-mêmes parallèles.

Les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{DJ}$ ont la même direction : (BE) // (DJ)
la même longueur : BE = DJ
et sont de sens contraires (d'après la figure), donc ils sont opposés :
$\overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{DJ}$ ou $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{JD}$

Par suite BEDJ est un parallélogramme : ses diagonales [BD] et [EJ] ont le même milieu.

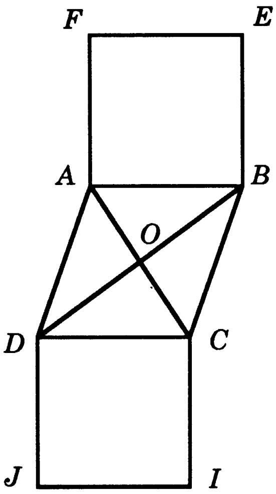
Or [BD] est une diagonale du parallélogramme ABCD donc a pour milieu le centre O de ce parallélogramme.

O est donc le milieu de [EJ].

Dans cette copie tout est écrit et démontré. Il est précisé que le sens des vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{DJ}$ est donné par la figure. Dans les copies B et C, cette information est remplacée par : *"par construction"*. Cette remarque sera reprise et développée dans le paragraphe III.

Par contre, nous pensons que globalement, les enseignants considèrent que les hypothèses doivent être écrites et non déduites de la figure car alors la différence est trop mince entre ce qui est vraiment donné et ce qui nécessite une démonstration. Or, cette différence est parfois imperceptible pour certains élèves.

Copie E



Pour prouver que O est le milieu de [EJ], prouvons d'abord que BEDJ est un parallélogramme.

Nous avons :

** ABCD est un parallélogramme donc (AB) // (DC) et AB = DC* $\boxed{1}$

** ABEF est un carré donc (BE)* $\perp$ *(AB) et BE = AB* $\boxed{2}$

** CDJI est un carré donc (DJ)* $\perp$ *(DC) et DC = DJ* $\boxed{3}$

De $\boxed{1}$ *,* $\boxed{2}$ *et* $\boxed{3}$ *on déduit (BE) // (DJ) et BE = DJ.*

** Par suite, le quadrilatère non croisé BEDJ ayant deux côtés parallèles et de même longueur est un parallélogramme.*

<u>Conclusion</u> : BEDJ étant un parallélogramme, ses deux diagonales [DB] et [EJ] ont même milieu.

Or O, centre du parallélogramme ABCD, est le milieu de [DB]. Par suite, O est aussi milieu de [EJ].

Nous y avons apprécié l'annonce immédiate de l'objectif de l'exercice, ce qui permet de faire apparaître clairement la structure de la démonstration et ses différents pas, même si ces pas sont imbriqués.

Ce type de rédaction est en fait plus proche de la démarche réelle que l'on suit au cours d'une recherche et permet de suivre plus aisément la logique du raisonnement. Elle est donc particulièrement satisfaisante pour le lecteur.

II - DES REDACTIONS CONTESTABLES

Nous cherchons à expliciter ici les raisons qui nous font rejeter certaines rédactions.

Copie F

(Copie complète)

Les deux segments [BE] et [JD] sont égaux et parallèles.
EBJD est donc un parallélogramme de centre O milieu de [DB] et de [JE].

Notre première réaction a été de nous exclamer : *"Non seulement, rien n'a été démontré, mais ces deux lignes comportent de graves erreurs"*.

Examinons d'abord la phrase : *"O milieu de [DB] et de [JE]"*. Dans ce pas de démonstration, *"O milieu de [DB]"* est une hypothèse alors que *"O milieu de [JE]"* est une conclusion. Rien dans le texte ne distingue le statut de ces deux propositions, ce qui nous paraît inacceptable dans une copie d'enseignant. Notre rôle ne consiste-t-il pas justement à aider nos élèves à distinguer hypothèse et conclusion dans un pas de démonstration ?

D'autre part cette copie comporte une erreur de langage : *"les segments [BE] et [JD] sont égaux"*. Si les longueurs *BE* et *JD* sont bien égales, les segments ne le sont pas !

Après analyse il nous a semblé qu'en seconde, une démonstration devait contenir des indices permettant de repérer :

- les données de l'énoncé qui sont effectivement utilisées dans la démonstration. Ici il n'y a aucun indice pour aucune des données utilisées.

- chacun des pas de démonstration. Bien sûr dans ce texte chacun des pas de démonstration est présent par un élément, mais cela ne permet pas de le repérer. Par exemple la première phrase se présente au mieux comme le résumé de deux pas de démonstration, un dont la conclusion est le parallélisme, un autre l'égalité. Or, au niveau de seconde, c'est sans doute huit pas de démonstration qui sont nécessaires, comme le font apparaître les autres rédactions proposées par les enseignants.

On peut considérer ce texte comme une rédaction donnant l'idée de la solution du problème. On pourrait d'ailleurs exploiter comme tel ce type de texte, en donnant la fiche page suivante comme travail à des élèves qui auraient un peu de mal à résoudre le problème.

$\boxed{\text{Copie G}}$

* *(AB) // (CD)* $\boxed{1}$ *car côtés opposés d'un parallélogramme.*

** *(BE)* $\perp$ *(AB)* $\boxed{2}$ *car ABEF et CDJI carrés.*

(JD) $\perp$ *(CD) donc d'après* $\boxed{1}$ *(JD)* $\perp$ *(AB)* $\boxed{3}$

*** $\boxed{2}$ *et* $\boxed{3}$ $\Rightarrow$ *(BE) // (JD)* $\boxed{4}$

de plus <u>ABEF et CDJI étant des carrés</u>

$$\left.\begin{array}{l} AB = BE \\ \\ DC = JD \end{array}\right\} \text{ et comme } AB = DC \text{ car ABCD parallélogramme alors } BE = JD \ \boxed{5}$$

<u>Finalement</u> $\boxed{4}$ *et* $\boxed{5}$ $\Rightarrow \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{JD} \Rightarrow$ *BEDJ parallélogramme* $\Rightarrow$ *O milieu de la diagonale [BD] est aussi milieu de [EJ].*

Il est sûr que l'emploi du symbole $\Rightarrow$ est à exclure d'une rédaction de seconde. D'une part, il risque de renforcer la confusion que font trop facilement les élèves de seconde entre une proposition de la forme A $\Rightarrow$ B et un pas de démonstration dans lequel A est l'hypothèse, A $\Rightarrow$ B résulte de l'application d'un théorème, et B est la conclusion. On en a un exemple typique au milieu de cette démonstration : $\boxed{2}$ et $\boxed{3}$ $\Rightarrow$ *(BE) // (JD)* $\boxed{4}$

D'autre part, il conduit tout naturellement à des rédactions, comme celle de la dernière partie de ce texte, qui ne nous conviennent nullement. En effet, sa présentation sous forme d'une suite d'implications ne met pas clairement en évidence que *"O milieu de la diagonale* [*BD*]*"* est une hypothèse. Pour bien le faire apparaître, il aurait fallu placer après la conclusion partielle *"BEDJ est un parallélogramme"*, une proposition du type *"Or on sait que O est milieu de* [*BD*]*"*.

Pour ce qui est de l'usage des numéros pour désigner des propositions, il présente l'avantage de bien faire apparaître que ces propositions ont successivement deux statuts. Dans un premier temps elles sont la conclusion d'un pas de démonstration, pour devenir un peu plus tard la proposition d'entrée d'un nouveau pas. Cet usage présente l'inconvénient de conduire à des rédactions dans le style de : $\boxed{2}$ et $\boxed{3}$ $\Rightarrow$ *(BE) // (JD)* $\boxed{4}$. Remarquons d'ailleurs que dans cet extrait on peut se demander si $\boxed{4}$ représente *(BE) // (JD)* ou l'implication entière.

Enfin la présentation en style télégraphique laisse supposer que la structure de la démonstration va être très apparente. Ici il n'en est rien ; montrons le par deux exemples :

- la disposition des lignes *(BE)* $\perp$ *(AB)* $\boxed{2}$ *car ABEF et CDJI carrés.*
  (JD) $\perp$ *(CD) donc d'après* $\boxed{1}$ *(JD)* $\perp$ *(AB)* $\boxed{3}$

  ne permet pas de distinguer clairement l'hypothèse *"CDJI est un carré"* et la conclusion "*(JD)* $\perp$ *(CD)*" de l'un des pas de la démonstration.

- la présentation $\left.\begin{array}{r} AB = BE \\ \\ DC = JD \end{array}\right\}\begin{array}{l} \\ \text{et comme } AB = DC \qquad \text{alors } BE = JD \ \boxed{5} \\ \text{car } ABCD \text{ parallélogramme} \end{array}$

  Finalement $\boxed{4}$ et $\boxed{5}$ $\Rightarrow \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{JD} \Rightarrow$ ***BEDJ*** parallélogramme.

  fait penser que chaque ligne est un pas de démonstration. Or la troisième ligne en confond deux qui sont très différents.

$\boxed{\text{Copie H}}$

Les deux carrés sont égaux et leurs côtés sont parallèles. Donc leurs diagonales sont égales et parallèles, en particulier AE = JC et (AE) // (JC).

Le quadrilatère AECJ est un parallélogramme (deux côtés à la fois parallèles et de même longueur).

O est le milieu de diagonale [AC] : il est aussi le milieu de l'autre diagonale [EJ] du parallélogramme AECJ.

Donc E,O et J sont alignés et O est le milieu de [EJ].

Cette rédaction peut paraître attrayante à certains, au premier abord, en raison de sa forme concise. Cependant elle n'est pas sans défaut. Nous y avons d'abord trouvé un théorème inventé : *"Deux carrés isométriques et dont les côtés sont parallèles, ont leurs diagonales égales et parallèles"*. Ce théorème ne fait partie en aucun cas de la panoplie d'un élève, que ce soit à l'entrée en seconde aussi bien qu'à la fin de la terminale. Nous avons d'ailleurs proposé à plusieurs enseignants de seconde de démontrer cette propriété et nous avons à chaque fois obtenu une démonstration de plus de 10 lignes.

De plus, nous voilà une nouvelle fois confrontés au problème de l'égalité :

- *"les deux carrés sont égaux"* : comme dans la démonstration F, il y a ici confusion entre égalité des figures et égalité de leurs dimensions. Nous rejetons donc cette rédaction.

- *"les diagonales sont égales"* nous parait plus acceptable si toutefois "diagonale" se traduit par "longueur de diagonale" (comme le rayon d'un cercle), mais dans la phrase *"les diagonales sont parallèles et égales"*, la confusion entre segments, droites et longueurs est intolérable.

Enfin, nous y avons trouvé une dernière ligne tout à fait inutile en guise de conclusion, puisqu'elle est la répétition de ce qui est écrit une ligne avant.