1 - Le milieu, notion complexe

En quoi la notion de milieu est-elle plus complexe qu'il n'y paraît au premier abord?

Examinons deux extraits de copies d'élèves pour le problème suivant :

ABC est un triangle isocèle de sommet A, I est le milieu de [AC], D est le symétrique de B par rapport à I. Montrer que CA = CD.

Première copie

Je vais prouver que ADCB est un parallélogramme.
On sait que D est le symétrique de B par rapport à I, donc IB = ID. De plus, I est le milieu de [AC] ; [AC] et [BD] se coupant en leur milieu I, ADCB est donc un parallélogramme.

Deuxième copie

Montrons que ADCB est un parallélogramme.
On sait que AI = IC car I est milieu de [AC].
On sait que BI = ID car D est symétrique de B par rapport à I.
Or on sait qu'un quadrilatère qui a ses diagonales qui se coupent en leur milieu est un parallélogramme. Donc ADCB est un parallélogramme.

Dans ces démonstrations, c'est bien la donnée "milieu" qui est utile deux fois, mais les élèves éprouvent le besoin de la transformer en "longueurs égales", pour finalement utiliser un théorème nécessitant des milieux. Comme si l'information "IB = ID" était pour eux plus précise que "I est milieu de [BD]".

Il semble que pour les élèves, du moins pendant un certain temps, la phrase, "I est milieu de [BD]" comporte une information essentielle : "IB = ID" et une information secondaire : "les points I, B, D sont alignés". Tout se passe comme si la question "montrer que I est milieu de [BD]" faisait disparaître le reste du plan : puisque la question parle du segment [BD], on a changé d'univers ; on travaille maintenant sur la droite ou le segment [BD] et là, il suffit de prouver une égalité de longueurs.

Voici, à ce propos, un extrait de dialogue avec une classe, suite à un exercice où il s'agissait de montrer que A est le milieu de [EB].

Prof	*Est-ce que le texte dit que les points sont alignés ?*
Elève	*Non.*
Prof	*Est-ce qu'il fallait le démontrer ?*
Elève	*Non. Puisque vous demandez de prouver que A est milieu de [EB], c'est qu'il est sur [EB].Vous n'auriez quand même pas demandé ça pour un autre point !*

Cette réponse s'explique sans doute en partie par le passé des élèves. Les premières recherches qui leur sont proposées en collège sont souvent des situations où l'alignement fait partie des données, et il ne reste qu'à prouver l'égalité de longueurs à l'aide des nouveaux outils qu'ils viennent d'acquérir (Pythagore ...).

Il est vrai aussi qu'on n'énonce jamais de théorème du style : "Un point I est le milieu du segment [AB] si A, I, B sont alignés et si IA = IB."

Notre première tâche est donc de repérer les élèves qui fonctionnent sur le modèle "milieu = équidistance". Ils sont vite d'accord sur le fait que l'alignement n'est pas dans les données(si c'est le cas). Il est alors très utile de les faire s'exprimer, oralement ou par écrit, en posant la question : "*Pourquoi n'as-tu pas démontré l'alignement ?*"

La discussion qui en découle permettra de préciser le contrat :

- l'égalité de longueurs caractérise la médiatrice et non le milieu.

- tout ce qui n'est pas dit dans les données doit être démontré.

- parfois, lorsque l'alignement fait partie des données, on n'en parle pas dans la démonstration, mais c'est une négligence.

Mais il est certain que ce modèle est fortement enraciné et que la faute reviendra encore. Seul un travail de longue haleine permettra de la supprimer.