II - LA NECESSITE DE L'ANALYSE

Comprendre le point de vue d'un élève sur la démonstration à travers l'analyse d'une copie, comprendre les progrès qu'il a pu faire en comparant deux copies, déterminer les points qu'il faut travailler avec lui, ne peut se faire sans une analyse assez fine des copies. Rappelons qu'il ne s'agit pas ici de juger la manière dont le problème a été résolu, mais, la résolution étant considérée comme acquise, la manière dont la démonstration a été rédigée. Dans un premier paragraphe nous proposons une grille d'analyse, que nous utilisons dans la partie III à titre d'exemple pour comparer deux copies d'un même élève. Le deuxième paragraphe sera consacré à une réflexion sur la correction des copies. Rappelons qu'il est aussi nécessaire de se donner les moyens d'analyser les textes mathématiques que rencontrent les élèves et qui vont jouer un rôle essentiel dans l'apprentissage de la démonstration. C'est ce que nous avons fait, à propos du théorème des milieux dans le chapitre précédent.

1 - Une grille d'analyse pour les démonstrations de seconde

L'intérêt d'une grille d'analyse est d'éviter des oublis et des confusions entre des phénomènes de nature différente. Elle ne doit en aucun cas être un carcan dans lequel on s'enferme. La grille ci-dessous, n'est donc qu'une proposition que chacun peut adapter à son point de vue, à son tempérament, à sa classe. Elle s'inspire largement de la grille proposée par R. Duval dans un atelier de l'Université d'été "Des activités ou des problèmes en mathématiques : conception et utilisation" (Rennes 1990). Elle est bien utile pour analyser les copies des élèves mais aussi celles des enseignants et des livres.

a) La structure

Avant de faire l'analyse d'une démonstration d'élève, il est nécessaire d'essayer de comprendre comment il a organisé son texte. Pour cela il semble que le plus facile est de partir des propositions pour lesquelles il y a des indices dans le texte indiquant qu'il s'agit de conclusions. Puis pour chacune de celles-ci on cherchera comment est organisé dans le texte le pas qui mène à cette conclusion. Ce travail fait, plusieurs types de fautes apparaissent.

b) Les fautes de résolution de problème

Souvent, après cette analyse préliminaire, on s'aperçoit qu'en fait l'élève n'a pas tous les éléments qui lui permettraient de résoudre le problème. Il n'est pas, dans ces conditions, capable de rédiger une bonne démonstration. Il est très important de repérer cette situation car l'action à entreprendre auprès de l'élève n'est pas de même nature.

C'est sans doute dans cette rubrique qu'il faut classer les difficultés révélées par les démonstrations sur la compréhension de certains concepts. Par exemple il apparaît clairement dans certains textes que la médiatrice n'est pas conçue comme associée à un segment, mais à un triangle, que la médiane est associée à un sommet et non au côté qu'elle traverse ("la médiane de A").

c) La structure de chaque pas

L'examen de chacun des pas de démonstration peut faire apparaître des fautes très variées qu'il faut soigneusement distinguer :

- utilisation d'un résultat non démontré et qui ne fait pas partie des données.
- utilisation d'une hypothèse étrangère au théorème, ou d'un énoncé de théorème dont les hypothèses sont trop riches. On a rencontré par exemple :
  "*Dans un triangle rectangle la droite qui joint les milieux d'un côté de l'angle droit et de l'hypoténuse est parallèle au 2ème côté de l'angle droit*".
- utilisation d'un théorème dans lequel il manque une hypothèse. En voici deux exemples :
  "*Tout triangle inscrit dans un cercle est rectangle*",
  "*Si* $a < b$, $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ " *(oubli que a et b sont de même signe).*
- utilisation d'un théorème dont la conclusion est déformée.
- utilisation d'un théorème bon mais inventé pour les besoins de la cause. Nous avons par exemple rencontré dans une copie d'enseignant : "*si deux carrés ont leurs côtés égaux et parallèles, ils ont leurs diagonales parallèles*".
- utilisation d'un théorème inadapté au contexte : par exemple, l'utilisation du théorème des milieux pour montrer que deux droites sont perpendiculaires.

On trouve aussi des indices défavorables comme la démonstration d'une conclusion qui ne sert en rien la conclusion finale. Les éléments inutiles sont souvent un indice de difficultés importantes. Par exemple dans une démonstration où seules la hauteur et la médiatrice nous intéressaient, on a souvent rencontré des énoncés du type : "*dans un triangle isocèle, la hauteur partant du sommet principal est aussi la médiatrice, la médiane et la bissectrice de ce sommet*".

Quand un pas ne comporte pas de faute, on peut examiner s'il est entièrement explicité : données du problème citées explicitement, rappel d'un résultat déjà démontré, énoncé d'un théorème, conclusion clairement identifiable. Pour un élève en difficulté le fait de ne pas tout expliciter est souvent un indice défavorable, alors qu'il peut s'agir d'une recherche de concision naturelle pour un élève qui domine la question.

d) Les expressions qui structurent le texte

Il faut se rappeler que la structure proprement dite de la démonstration est indiquée dans le texte par des expressions, des mots ou des dispositions dont le rôle principal est de préciser le statut des propositions : hypothèse, théorème, résultat déjà démontré, résultat intermédiaire, objectif du prochain pas, conclusion. Il est clair qu'il y a une grande variété dans la formulation, qui donne une grande liberté d'expression. Il est nécessaire de repérer d'abord les "vraies fautes", c'est-à-dire les expressions qui donnent des indications fausses sur le statut des propositions, comme l'emploi d'un "donc" pour annoncer une donnée. Il faut bien les distinguer des simples maladresses. Par exemple, on trouve souvent :

"*si le triangle ABC est isocèle, alors sa hauteur est confondue avec sa médiane*"
au lieu de :
"*comme le triangle ABC est isocèle, sa hauteur est confondue avec sa médiane*".

Nous estimons qu'il n'y a ici qu'une simple maladresse qui consiste à énoncer le théorème utile au lieu de marquer nettement que : "*le triangle ABC est isocèle*" est une donnée du problème.

La structure du texte peut être mise en évidence par sa présentation dans la page, par des accolades ou par des symboles, comme par exemple dans la copie G du chapitre 1. C'est toujours la question : "*est-ce que le statut de chacune des propositions est bien clair ?*" qui doit être le guide pour l'analyse de ces présentations.

Cette analyse doit être complétée par une étude plus globale : le texte est-il pauvre en expressions qui indiquent sa structure, comporte-t-il des stéréotypes (répétitions très fréquentes de la même formulation pour des pas semblables), les expressions sont-elles variées ?

e) Les fautes de français

Il est évident que beaucoup de fautes sont de ce type. Il faut les distinguer soigneusement car elles ne sont pas de même nature. La longueur des phrases, leur complexité vont y jouer un rôle essentiel. On ne peut sans dommage les négliger, car pour beaucoup d'élèves, l'apprentissage de la démonstration passe par la prise de conscience qu'il s'agit d'un texte. Il faut bien faire une distinction entre les usages et les fautes incontestables : par exemple, il n'est pas d'usage de dire "*notre triangle*" mais il n'y a là rien d'incorrect. Ou encore : "*le triangle EDC est rectangle face au diamètre [DE]*" est une manière imagée de dire que : "*EDC est rectangle parce qu'il est inscrit dans un demi-cercle*". De même l'emploi de l'expression : "*on mène par A la parallèle à (CD)*", alors que dans l'énoncé tout est déjà tracé, n'est-il pas une survivance des nombreux programmes de construction écrits en 6ème et en 5ème. En revanche, un élève qui écrit : "*si deux droites sont perpendiculaires, toute parallèle à l'une l'est à l'autre*" commet une erreur mathématique en utilisant à mauvais escient le "l'".

f) Les notations

Rappelons qu'il ne s'agit pas ici de fautes de démonstration. Là aussi comme nous l'avons dit plus haut les usages jouent un rôle très important.

g) Les éléments qui ne font pas partie intégrante de la démonstration

Une démonstration peut comporter de tels éléments. On peut annoncer en début d'un paragraphe le résultat que l'on veut démontrer, ou en début de démonstration le plan que l'on compte suivre. On peut indiquer comment on a trouvé la solution du problème. On peut ajouter des commentaires sur l'importance d'un résultat, sur son aspect surprenant qui peut d'ailleurs conduire parfois à émettre un doute sur sa validité. Si ces éléments sont pertinents ils constituent un indice très favorable de la maîtrise de l'élève.

2 - La correction des copies

La plupart des enseignants passent beaucoup de temps à corriger les démonstrations de leurs élèves. Ils essaient de leur indiquer les fautes mais aussi ce qu'ils auraient dû écrire. L'efficacité de ce travail très astreignant est loin de satisfaire les enseignants. Nous allons essayer de comprendre les raisons de cette relative inefficacité, puis de proposer des moyens de modifier cet état de choses.

a) Comment un élève peut-il comprendre la correction ?

Pour qu'un élève puisse se servir de la correction il faut d'abord qu'il comprenne clairement la signification de toutes les remarques qu'elle contient. Plutôt que de faire une analyse théorique de cette difficulté nous allons prendre la correction très soignée d'une copie que vous trouverez page suivante et en faire une petite analyse en utilisant les idées de la grille.

La principale difficulté pour l'élève est de repérer que les remarques de l'enseignant peuvent se situer à des niveaux très différents.

D'abord il y a deux remarques concernant les fautes essentielles que comporte cette démonstration :

- "*il manque le principal de la démonstration : le parallélisme de (ON) et (BM)*". L'élève en effet utilise cette hypothèse de manière explicite dans le dernier pas de sa démonstration alors qu'elle n'est pas dans les données du problème et qu'elle n'a pas été démontrée.

- "*il est inutile que le triangle soit rectangle*". La faute est différente, puisqu'il s'agit de l'énoncé d'un théorème avec une hypothèse inutile. Il peut être difficile d'expliquer à l'élève que cet énoncé, qui est bon (rajouter une hypothèse ne rend jamais un théorème faux), est à proscrire d'une démonstration. Pourtant il y a au moins deux bonnes raisons : d'une part la règle est que les seuls énoncés admis sont ceux qui sont dans le cours et celui-ci n'y est pas, mais surtout il faut lutter contre la tendance très dangereuse de cacher son ignorance de la structure réelle de la démonstration en mettant le maximum d'informations. Remarquons que : "*nous pouvons appliquer l'énoncé des milieux*" est une phrase qui a été barrée par l'enseignant bien qu'elle intervienne normalement dans une bonne démonstration.

Deux remarques demandent à l'élève une plus grande précision :

- "*de diamètre [AB]*". On peut estimer qu'il s'agit ici d'une faute mineure si l'on admet que "*inscrit dans un demi cercle*" veut dire que l'un des côtés est le diamètre du demi cercle.

- de même un peu plus loin, "*d'un*" indique mieux que le premier côté peut être choisi quelconque dans l'application du théorème des milieux.

La remarque "*à reprendre clairement*" fait allusion à la complexité excessive de la phrase qui entraîne d'ailleurs une faute ou au moins une lourdeur de français (proposition relative suivie d'une proposition au participe présent). De même, l'ajout de "*et est*" correspond à une faute de français puisque le verbe sous entendu devant parallèle ne peut être "*passe*".

Une remarque tient à une différence de style entre l'enseignant et l'élève : "*notre*" est rejeté pour "*le*". On comprend le souci de l'enseignant de faire disparaître cette personnalisation, mais il n'y a ici aucune faute de mathématiques ou de français. De plus, il vaut mieux laisser l'élève libre de son style si l'on veut obtenir des progrès rapides sur l'essentiel.

Enfin une faute d'orthographe commise par l'élève dans le passage "*si une droite* ***par*** *du milieu*" empêche l'enseignant de comprendre et le conduit à remplacer le passage par "*si une droite passe par le milieu*".

Aucune remarque n'indique à l'élève les points que l'enseignant considère comme positifs. Pourtant les mots de liaison utilisés font apparaître assez clairement l'organisation des pas, et le fait d'annoncer ce qu'on va démontrer est un point positif.

Cette brève analyse montre bien que certains élèves devant cette correction vont être incapables d'interpréter les remarques pour faire des progrès.

CORRECTION D'UNE COPIE D'ELEVE EN DEBUT DE SECONDE

(C_1) est le cercle de diamètre [AB] et de centre O.

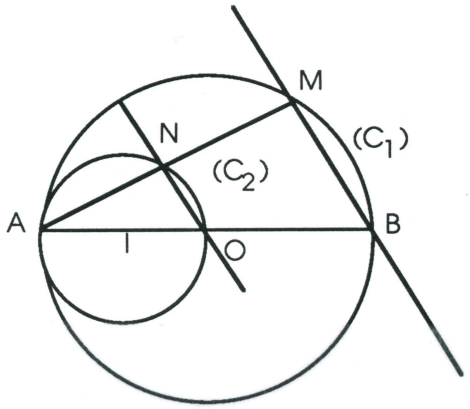
(C_2) est le cercle de diamètre [AO] et de centre I.

M est un point du cercle (C_1) distinct de A et B.

Le segment [AM] recoupe le cercle (C_2) en N.

Démontrer que N est le milieu de [AM].

A rédiger avec soin et "en liberté" !



Démontrons que N est le milieu du segment [AM]

- Montrons d'abord que le triangle AMB est un triangle rectangle : puisque AMB est inscrit dans un demi-cercle de diamètre [AB] alors, AMB est un triangle rectangle en M. ou

- Puisque le triangle AMB est rectangle ~~alors nous pouvons appliquer l'énoncé des milieux : dans un triangle rectangle~~ il est inutile que le triangle soit rectangle si une droite passe par le milieu d'un 1er côté et est parallèle à un second, alors elle coupe son troisième côté perpendiculairement en son milieu. Donc nous pouvons dire que la droite (NO) qui vient du [AB], étant parallèle à [MB] (A reprendre clairement) coupe [AM] en son milieu par hypothèse

Conclusion : N est le milieu du segment [AM]

il manque le principal de la démonstration : le parallélisme de (ON) et (BM).

b) Que faire ?

La principale raison de la difficulté qu'ont les élèves à comprendre et utiliser la correction de leur copie vient de ce qu'ils n'ont pas les moyens d'effectuer un véritable travail sur cette correction. Il faut donc chercher des moyens d'action avec le double objectif que l'élève comprenne mieux le sens des corrections et qu'il ait une véritable activité.

Une idée, déjà appliquée par beaucoup d'enseignants, est d'adapter la correction au niveau de l'élève. Par exemple, il est sans doute inutile de corriger certaines fautes mineures de notations pour un élève dont les démonstrations comportent des grosses fautes de raisonnement. Cette idée peut être un peu plus systématique : par exemple, on peut convenir avec un élève ou avec la classe que l'on ne corrigera pendant un certain temps qu'une sorte d'erreurs. De cette manière la complexité des objectifs du prof se dégagera plus clairement : corriger les vraies fautes de démonstration, mais aussi les fautes de français, les fautes de notations, les non-respects de certains usages etc...

Pour qu'un élève travaille sur la correction, il faut créer une véritable motivation. Un bon moyen de l'obtenir est de partir du principe que la démonstration rédigée par l'élève est le point de départ du travail et que le jugement, c'est-à-dire la note ne tiendra compte que des améliorations apportées à ce texte initial. Concrètement on fait une correction d'une première copie en donnant simplement des suggestions sur les fautes possibles (une des pistes est d'indiquer la nature de la faute en utilisant une grille comme celle du paragraphe précédent). On fait une correction au tableau, puis on demande aux élèves de modifier les copies en tenant compte des indices donnés. Ce travail sur les copies corrigées peut être fait sur sa propre copie comme sur celle d'un camarade en travail individuel ou en travail de groupes. C'est un travail de ce type qui est donné dans le chapitre 2 page 34 : **vers une démonstration parfaite**, où, à partir d'une copie particulièrement "*intéressante*", un travail en classe entière est engagé.

La production de textes de démonstration en groupes est un autre moyen. Pour réussir il est nécessaire de bien séparer la rédaction de la résolution du problème. L'ensemble des élèves doit connaître clairement les idées qui permettent la résolution au moment du travail de rédaction. Les textes produits sont bien meilleurs, et les discussions entre les élèves au cours de la rédaction sont très formatrices. Enfin au moment de la correction la discussion est facilitée.

En conclusion, il nous semble qu'il est plus efficace de corriger moins de copies, mais de faire autour de chaque correction un travail plus approfondi. Il est nécessaire de changer l'objectif de la correction. Le but essentiel ne doit pas être de repérer ce qui est faux pour mettre une note, mais au contraire de découvrir ce qui est déjà maîtrisé et de le faire savoir à l'élève et de lui indiquer dans quelles directions il doit aller pour faire des progrès.