ALIGNEMENT

C'est au hasard de discussions informelles qu'a germé l'idée d'inclure ce thème dans notre recherche. En effet, il apparaît que les démonstrations faisant intervenir l'alignement sont fréquemment mal rédigées par les élèves, et de surcroît, certaines fautes reviennent sans cesse dans les copies, malgré nos explications répétées. Cette situation correspond exactement au sujet de notre recherche : "comment améliorer la rédaction des démonstrations par les élèves ?"

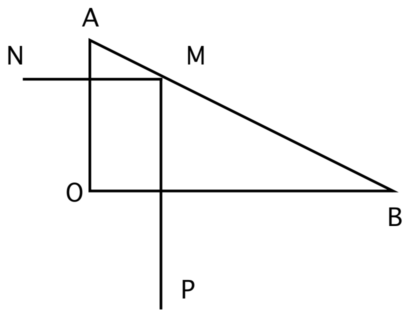
Nous allons d'abord présenter quelques fautes typiques, extraites de copies d'élèves de seconde. Nous exposerons les grandes étapes de notre travail, pour terminer par une analyse plus détaillée des causes d'erreur.

I - ETUDE DE QUELQUES EXEMPLES

1 - Premier exemple

AOB est un triangle rectangle en O ; M un point du segment [AB], distinct de A et B. On trace le symétrique N de M par rapport à (AO), et le symétrique P de M par rapport à (BO).

Montrer que O est le milieu de [NP].



Pour cet exercice, deux méthodes différentes de résolution contiennent chacune une erreur caractéristique.

Première rédaction

Comme N est le symétrique de M par rapport à (AO), alors (AO) est la médiatrice de [MN]. O, appartenant à (AO), est équidistant de M et N, donc OM = ON.

De même, comme P est le symétrique de M par rapport à (BO), alors (BO) est la médiatrice de [MP], et OM = OP.

Donc ON = OP et O est le milieu de [NP].

Deuxième rédaction

M et P sont symétriques par rapport à (OB) donc (MP) est perpendiculaire à (OB).De plus, AOB est rectangle en O, donc (OB) est perpendiculaire à (AO). Or, si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, elles sont parallèles ; donc (AO) // (MP).

Dans le triangle MNP, (AO) passe par le milieu de [MN], parce que M et N sont symétriques par rapport à (AO). Or, si une droite passe par le milieu d'un côté d'un triangle, et si elle est parallèle à un autre côté, alors elle coupe le troisième côté en son milieu. Donc (AO) coupe [NP] en son milieu O.

Dans les deux cas, la faute est évidente : ni l'égalité de longueurs "ON = OP", ni l'affirmation "(AO) passe par le milieu de [NP]", ne signifient que O est le milieu de [NP]. Il manque, pour conclure correctement, un pas de démonstration montrant que "O, N et P sont alignés".

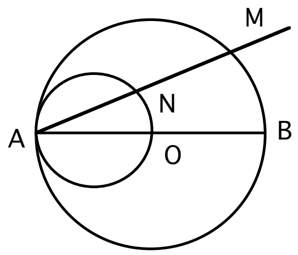
Il est important d'analyser ces erreurs car elles sont fréquentes : quand on donne cet exercice en seconde, les trois quarts des élèves proposent l'une des deux rédactions ci-dessus. Bien qu'à l'évidence, la rédaction ne parle pas d'alignement, rien ne permet de savoir si l'élève y a pensé ou non, s'il omet volontairement d'en parler, et pourquoi. La question se pose alors de savoir si les remarques du genre "tu as oublié de prouver l'alignement" ou "démonstration incomplète" que nous noterons sur les copies apportent une aide à l'élève. Peut-être sera-t-il surpris par nos exigences surtout si l'enseignant n'a pas sanctionné une autre rédaction dans laquelle un alignement a été oublié.

2 - Deuxième exemple

C est un cercle de diamètre [AB], de centre O, et C' le cercle de diamètre [AO].

M est un point de C distinct de A et B, et la droite (AM) recoupe C' en N.

Montrer que N est le milieu de [AM].



Voici une réponse d'élève (en début de seconde) :

* *Considérons le cercle C' : d'après les hypothèses, on sait que N est un point du cercle C', et que [AO] est son diamètre. Or, dans un cercle, un point pris sur celui-ci et joignant les deux extrémités d'un diamètre de ce cercle forme un triangle rectangle. Donc (AN)⊥(NO).*

* *Considérons le triangle AMO : [AO] et [MO] sont deux rayons de C. Donc AMO est un triangle isocèle. Or dans un triangle isocèle, la hauteur est aussi médiatrice.*
Donc (NO) coupe [AM] en son milieu N.

Cet élève a parfaitement résolu le problème, et sa rédaction, malgré quelques maladresses de style, est globalement satisfaisante.

Examinons cependant le texte de plus près. A deux reprises l'élève utilise l'alignement des points A, M et N sans qu'on puisse savoir s'il a pensé : "*je sais que A, M et N sont alignés parce que c'est indiqué dans l'énoncé*" plutôt que : "*je le vois sur la figure*".

- D'abord quand il écrit "*dans le triangle isocèle, la hauteur est aussi médiatrice. Donc (NO) ...*". Il considère bien que (NO) est la hauteur du triangle AMO. Or la conclusion précédente étant (ON) ⊥ (AN) et non (ON) ⊥ (AM) ; il s'est donc servi de l'alignement sans qu'aucun indice ne l'indique dans le texte.
- Il n'y a pas davantage d'indice dans la conclusion "*(NO) coupe (AM) en son milieu N*" qui utilise également cet alignement.

Bien sûr ceci n'a rien de choquant et il ne semble pas raisonnable de faire à l'élève une remarque à ce sujet, encore moins de le sanctionner. Cependant s'il y a bien pour lui une utilisation abusive de la figure, comprendra-t-il pourquoi ce texte est accepté sans problème alors qu'on lui refuse les rédactions précédentes.

Un autre "oubli" courant chez les élèves va être mis en évidence sur un nouvel exemple.

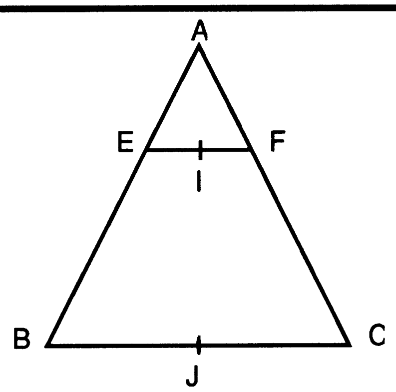
3 - Troisième exemple

Dans un triangle ABC, on construit les points E et F tels que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$;

et $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Soit I le milieu de [EF] et J le milieu de [BC].

Montrer que A, I, J sont alignés.



Ce qui peut donner :

Comme $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, *alors, d'après la réciproque du théorème de Thalès, (EF) est parallèle à (BC).*

Dans le triangle ABJ, on a donc $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ *et (EI) // (BJ) ;*
donc, d'après le théorème de Thalès, on en déduit :

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AJ}$ *et donc A, I et J sont alignés.*

L'erreur est, ici, l'emploi du théorème de Thalès, sans en avoir contrôlé les hypothèses et donc l'utilisation implicite de l'alignement des points A, I et J, dans le but de démontrer.... cet alignement.

Comme dans les exemples précédents, le poids de la figure est en grande partie la cause de cette erreur que l'on retrouve fréquemment, même chez des "experts" en mathématiques.

Pour plusieurs élèves de seconde, la distinction entre "données de l'énoncé" et "conjectures faites sur la figure" est loin d'être établie ; l'erreur peut donc être due à un emploi abusif de la figure. Mais il se peut aussi que la cause de l'oubli soit tout autre, et que tout simplement, pour cet élève, l'alignement ne soit pas nécessaire dans la démonstration.

Ces trois exemples recouvrent assez bien les différents types d'erreurs que l'on rencontre dans les copies au sujet de l'alignement. Pour résumer :

* une droite en remplace une autre.
* le milieu est assimilé à l'équidistance.
* difficulté d'emploi de l'expression "passe par le milieu de".
* difficulté d'emploi du théorème de Thalès.

Ces erreurs ont d'ailleurs une caractéristique commune : l'alignement n'y est pas vraiment oublié, mais plutôt utilisé inconsciemment. Il nous a donc semblé important de consacrer du temps pour cerner un peu mieux les causes de ces erreurs et tenter d'y remédier.

II - UN PREMIER ESSAI

Nous avions tout d'abord pensé que l'oubli de l'alignement pouvait avoir trois causes :

- les élèves ne pensent pas ou ne voient pas la nécessité de le démontrer car ils font confiance à la figure.

- ils ne sont pas habitués à prouver des alignements, donc ils ne mobilisent pas rapidement les méthodes pour le faire.

- ils maîtrisent mal le raisonnement et oublient de vérifier les conditions d'emploi de certains théorèmes.

D'où l'idée d'une première séquence à l'aide de la fiche N° 1, dont l'objectif était d'apprendre aux élèves :

* à se méfier d'une figure.
* à prouver l'alignement par des méthodes variées.
* à repérer, dans une démonstration, une faute du type "alignement non vérifié".

La fiche N° 2 a servi de test quelque temps plus tard et nous a permis de tirer un premier bilan.

FICHE N° 1

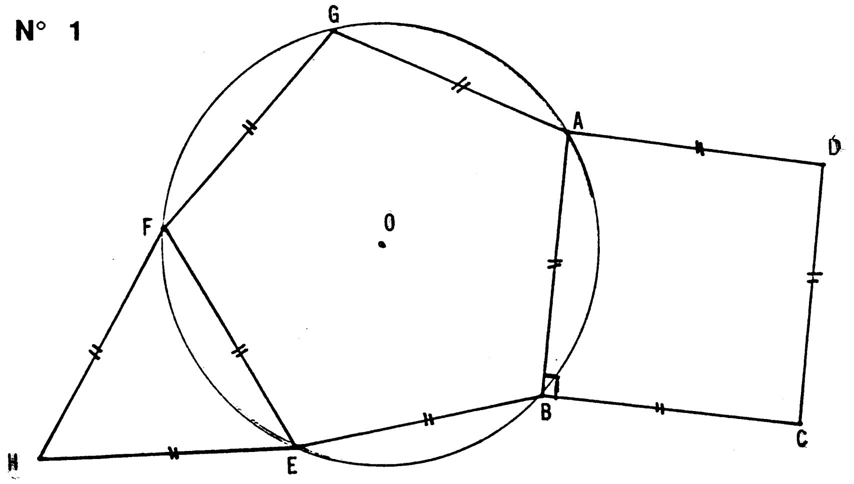
ALIGNEMENT DES POINTS

Exercice N° 1

ABCD est un carré ; ABEFG est un pentagone régulier, EHF est un triangle équilatéral.

H, E et C sont-ils alignés ?

Figure N° 1

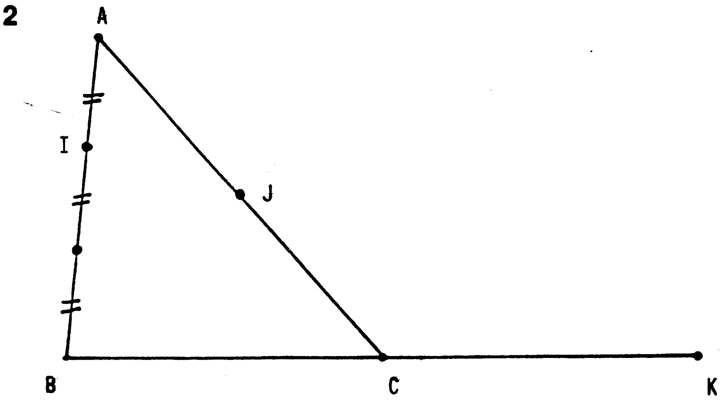


Exercice N° 2

Sur la figure N° 2, I est tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\ \overrightarrow{AB}$, J est le milieu de [AC] et C celui de [BK].

I, J et K sont-ils alignés ?

Figure N° 2



- Nous te demandons ici de trouver différentes méthodes pour démontrer l'alignement de I, J et K.
- Tu dois rédiger au moins trois solutions avec des méthodes différentes pour la prochaine séance.

FICHE N° 1 (suite)

ALIGNEMENT DES POINTS

Exercice N° 3

A, B, F sont trois points non alignés.

a) Construire les points E et C tels que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AF}$.

b) Démontrer que (EF) // (BC).

c) Soient I et A' les milieux de [EF] et [BC].

Démontrer que A, I et A' sont alignés.

Voici deux démonstrations des questions b) et c), ton travail est le suivant :

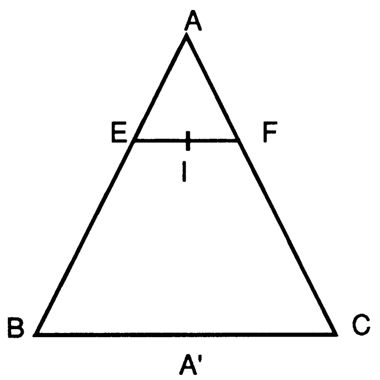
Pour la première démonstration il y a une faute dans les quatre dernières lignes, tu dois trouver l'endroit précis où elle se trouve, puis tu dois expliquer en quoi consiste la faute, sans chercher à la corriger ; évidemment tu mets ton explication par écrit.

Dis nous aussi ce que tu penses de la deuxième démonstration.

FICHE N° 1 (suite)

ALIGNEMENT DES POINTS

DEMONSTRATION N° 1



b) Dans le triangle ABC nous avons $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ donc avec le théorème réciproque de Thalès nous pouvons dire que les droites (EF) et (BC) sont parallèles.

c) Dans le triangle ABA' nous savons donc d'après b) que (EI) est parallèle à (BC) (ou (A'B)). Donc avec le théorème de Thalès (direct), comme nous avons $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, nous avons aussi $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AA'}$.

Ceci prouve que $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AA'}$ sont colinéaires, donc que A, I et A' sont alignés.

DEMONSTRATION N° 2

b) D'après les hypothèses nous avons $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$; donc nous pouvons écrire que :

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF}$ (relation de Chasles)

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE}$ (car $\overrightarrow{EA} = -\overrightarrow{AE}$)

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$$

Donc $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ (toujours avec la relation de Chasles)

$\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{BC}$ étant colinéaires on a alors (EF) // (BC)

c) Comme I est le milieu de [EF] on a $\overrightarrow{EI} = 0{,}5\ \overrightarrow{EF}$
et comme A' est le milieu de [BC], on a $\overrightarrow{BA'} = 0{,}5\ \overrightarrow{BC}$

On a donc :
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI} &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + 0{,}5\ \overrightarrow{EF}\\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + 0{,}5\ (\frac{1}{3}\overrightarrow{BC})\\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + 0{,}5\ \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AA'}\end{aligned}$$

Ce qui établit que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AA'}$, ces vecteurs étant colinéaires, nous avons donc démontré que les points A, I et A' sont alignés.

FICHE N° 2

TROUVER LA FAILLE DANS LE RAISONNEMENT

Instructions

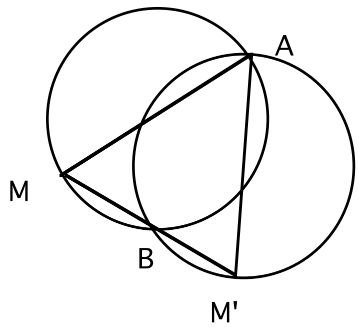
Voici un exercice et deux démonstrations fausses de cet exercice. Tu dois localiser l'endroit précis où est commise la faute, dire pourquoi il y a faute sans chercher à donner une rédaction correcte de l'exercice.

Données

Les deux cercles c et c' ont même rayon, se coupent en A et B ; [AM] et [AM'] sont des diamètres de c et de c' .

Question

Montrer que B est le milieu de [MM'].



DEMONSTRATION N° 1

- Le triangle ABM est inscrit dans un demi-cercle de diamètre [AM] donc il est rectangle en B, (AB) est donc la hauteur issue de A dans le triangle AMM'.
- De plus le triangle AMM' est isocèle de sommet A (les diamètres [AM] et [AM'] ayant même longueur).
- Le triangle étant isocèle, en A, la hauteur issue de A ici (AB) est aussi la médiatrice de [MM'].
- La médiatrice d'un segment coupe celui-ci en son milieu d'où B est le milieu de [MM'].

DEMONSTRATION N° 2

- Les triangles ABM et ABM' étant inscrits dans des demi-cercles de diamètres [AM] et [AM'] sont rectangles en B.

Avec le théorème de Pythagore dans chacun de ces triangles :

$AM'^2 = BM'^2 + AB^2$ donc $BM'^2 = AM'^2 - AB^2$ mais $AM'^2 = (2r)^2$ (r rayon des cercles)

$AM^2 = BM^2 + AB^2$ $BM^2 = AM^2 - AB^2$ $AM^2 = (2r)^2$

d'où $BM'^2 = 4r^2 - AB^2$ et $BM^2 = 4r^2 - AB^2$

On en déduit donc que $BM'^2 = BM^2$ et que $\boxed{BM = BM'}$

Cette dernière égalité nous montre alors que B est le milieu de [MM'].

MODE D'EMPLOI DES FICHES N° 1 et N° 2

MODE D'EMPLOI FICHE N° 1

Exercice 1

Objectifs :
- Apprendre à se méfier d'une figure.
- Trouver une méthode pour prouver l'alignement ou non de trois points.

Déroulement :
- Liberté de recherche (10 min).
- Aides pour démarrer : (selon les demandes des élèves).
  * Trouver la mesure des angles des triangles AOB ; BOC ; ... ; GOA.
  * Trouver la mesure de $\widehat{HEC}$.

Exercice 2

Objectif :
- Trouver un outil pour prouver l'alignement de trois points.

Déroulement :
- Liberté de recherche (10 min).
- Recherche de méthodes (débat avec les élèves pour qu'ils aient des pistes pour travailler).
  * Parallélisme de (IJ) et (IK) en utilisant le milieu de [BI].
  * Avec vecteurs ($\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$).
  * Par l'analytique (repère (B, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}$)).
  * Avec le théorème de Thalès (délicat à rédiger sans vecteur).
- Les élèves rédigent leurs solutions par au moins trois méthodes sur feuille à la maison.
- Nous essayons de relever des démonstrations avec des fautes caractéristiques, que nous proposons aux élèves.
- Ceux-ci doivent les trouver et corriger en débat avec la classe entière.

MODE D'EMPLOI DES FICHES N° 1 et N° 2 (suite)

MODE D'EMPLOI FICHE N° 1 (suite)

Exercice 3

Objectifs :

- Analyser un raisonnement.
- Déceler une erreur de raisonnement.
- Etre capable de donner la cause de cette erreur.

Déroulement :

- A faire après la correction de l'exercice N° 2.
- Les élèves répondent individuellement sur leur feuille (20 min maximum).
- On corrigera l'exercice, la séance suivante, avant le test final.

Démonstration 1

Ici l'erreur apparaît lorsque le triangle ABA' est utilisé ; on admet implicitement I ‘ (AA') lorsque nous disons que nous appliquons le théorème de Thalès.

Démonstration 2

Elle prouve clairement l'alignement de A, A', I.

MODE D'EMPLOI FICHE N° 2

Cette fiche est le test final, les élèves répondent individuellement sur la feuille (durée du test : 20 min maximum).

Bilan de ce premier essai

Pour l'exercice 1 de la fiche N° 1, les élèves pensent assez rapidement à utiliser les angles, et le calcul présente peu de difficultés. Devant le résultat -un angle de 177°- beaucoup sont surpris. Certains recommencent leurs calculs, jusqu'au moment où l'un d'eux pense à relire attentivement le texte pour constater que la question est : "les points sont-ils alignés ?". Plus de problème alors, sauf pour quelques-uns qui concluent : "177 ≈ 180, donc les points sont alignés". Cette réponse met en évidence une mauvaise compréhension de la notion VRAI-FAUX en mathématiques ; pour ces élèves, l'angle obtenu est vraiment trop proche de 180° pour conclure au non-alignement.

Dans l'exercice 2 de la fiche N° 1, nous avons revu plusieurs méthodes et nous avons profité de cette occasion pour décomposer devant les élèves des erreurs typiques, par exemple l'emploi du théorème de Thalès alors qu'on ne sait pas que les points sont alignés, erreur que l'on retrouve justement dans l'exercice 3 de la fiche N° 1. On pouvait dès lors s'attendre à de bons résultats pour cet exercice 3, ce qui n'a pas vraiment été le cas. Les résultats sont très variables d'une classe à l'autre (de 5% à 65%), suivant le temps déjà consacré au calcul vectoriel et au théorème de Thalès. Presque tous les élèves reconnaissent que la démonstration 2 est correcte (en corrigeant parfois la rédaction). Par contre, beaucoup ont du mal à localiser l'erreur dans la démonstration 1 et surtout à expliquer clairement en quoi elle consiste. Ceci prouve bien qu'il ne suffit pas d'avoir sous les yeux une bonne solution pour comprendre en quoi une autre est mauvaise.

Le test final : "***Trouver la faille dans le raisonnement***" devait permettre de contrôler chez les élèves une certaine "sensibilisation à l'alignement". Nous voulions en particulier tester les progrès dans la capacité à repérer une erreur du type "alignement utilisé sans avoir été prouvé". On constate à ce sujet assez peu de changement. Les élèves qui avaient déjà clairement repéré l'erreur de l'exercice 3 réussissent bien le test, à part quelques exceptions. Mais il y a peu de progrès pour les autres.

Ce test permet de faire une autre constatation intéressante : l'erreur de la démonstration 1 du test ("une droite en remplace une autre") est repérée à 65%, alors que l'erreur de la démonstration 2 ("milieu assimilé à équidistance") est repérée à 43%. Plus d'un élève sur deux pense que B est milieu de [MM'] dès que BM = BM' ! Cette différence sensible met en évidence une difficulté propre à l'égalité de longueurs : plusieurs élèves ont bien mis en évidence dans la démonstration 1 que l'alignement de M, B, M' n'est pas une donnée, et cependant, ils ne voient aucune erreur dans la démonstration 2. Nous analyserons plus longuement cette difficulté dans le paragraphe IV.

En y regardant mieux, l'absence de progrès entre l'exercice 3 de la fiche N° 1 et le test n'est pas étonnante, car les erreurs introduites dans ces différents exercices ne sont pas du même type, et n'ont donc pas les mêmes causes. Un apprentissage spécifique à chacune est peut-être nécessaire.

Malgré ses nombreuses imperfections, cette fiche a rempli en partie ses objectifs :

- les exercices 1 et 2 permettent de revoir différentes méthodes de démonstrations d'alignement.
- l'exercice 3, s'il n'est pas efficace pour apprendre aux élèves à déceler une erreur, permet par contre au professeur de repérer les élèves en difficulté sur ce sujet, et de les regrouper pour un travail spécifique. C'est aussi le rôle du test final. Reste à élaborer cet apprentissage ; c'est ce que nous tentons de faire dans ce qui suit.

III - DEUXIEME ESSAI

A plusieurs reprises, nous avons proposé aux élèves des exercices faisant intervenir milieux et alignement, nous avons décortiqué devant eux les fautes de raisonnement, et il s'en trouve toujours pour refaire la faute au contrôle suivant. Le problème est bien là :

- comment convaincre un élève que sa démonstration contient une erreur ?

- comment l'amener à réaliser quelle est l'erreur ?

Puisque décortiquer l'erreur ne suffit pas, nous avons pensé que l'élève admettra que sa solution est fausse si cette solution le conduit à une contradiction flagrante.

Voici donc la séquence que nous avons mise au point et testée.

1 - Première heure

(En module ou en travaux dirigés)

ELABORATION D'UN TEXTE D'EXERCICE PAR LES ELEVES

A partir d'une solution d'exercice, on demande aux élèves de retrouver l'énoncé, énoncé qui va servir ensuite pour toute la séquence.

On distribue aux élèves la fiche "***Ecrire l'énoncé***"

Déroulement de la séance :

- 10 minutes : travail individuel ; les élèves sont bien dispersés dans la classe.
- 10 minutes : par groupes de 3 ou 4, les élèves comparent leur texte et se mettent d'accord sur un texte commun, qu'ils recopient sur un transparent ou une affiche.
- 15 minutes : chaque groupe, à tour de rôle, délègue un élève pour présenter son texte. Toutes les productions sont ainsi critiquées, pour aboutir à un texte convenant à tous.
- 20 minutes : les élèves sont de nouveau dispersés, et on leur demande de résoudre maintenant l'exercice par une méthode non vectorielle, et de rédiger leur solution sur une feuille à rendre au cours suivant.

COMMENTAIRES SUR CETTE PREMIERE SEANCE

La plupart des productions de groupes sont satisfaisantes. On y relève surtout des maladresses de style, ou des erreurs de notations (droite pour segment,...). Cependant, pour un ou deux groupes, on trouve des erreurs de fond, comme : "........ la droite (AE) coupe [BC] en son milieu I.....". Ici, le milieu de [BC] est bien perçu comme une donnée, mais l'alignement A, I, E "vu sur la figure" prend aussi force de donnée.

Les erreurs sont vite reconnues par ceux qui les ont commises, et l'accord se fait facilement sur le texte final.

Pour la nouvelle méthode de résolution, plusieurs prouvent que ABEC est un parallélogramme (ce qui est une méthode vectorielle déguisée). D'autres pensent à prouver que AI + IE = AE. Enfin beaucoup proposent une solution avec "la droite des milieux" dans ADE, avec, la plupart du temps, une erreur voisine de celle rencontrée dans la copie suivante :

> Démonstration : ABCD est un carré, alors [AD] est parallèle à [BC]. On sait que E est le symétrique de D par rapport à C, donc C est le milieu de [DE]. Dans le triangle ADE, la droite (CI) est parallèle à un côté [AD] et elle passe par le milieu d'un autre côté [DE], donc elle coupe le troisième côté [AE] en son milieu.
>
> Donc, I est le milieu de [AE]

C'est sur cette erreur que nous allons travailler dans la suite. Si donc aucune copie ne contient ce type de faute, l'activité peut se terminer là.

2 - Deuxième heure

1 - Les élèves reçoivent la fiche ***"La démonstration litigieuse"*** et y travaillent individuellement (environ 5 minutes). Puis ils se remettent en groupes.

2 - Le professeur demande alors à quelques élèves d'énoncer leurs constatations : tous voient que la donnée "I milieu de [BC]" ne sert pas. Certains font remarquer qu'on se sert de "I $\in$ (BC)" pour affirmer que "(CI) est parallèle à (AD)", mais ils sont d'accord que la donnée "milieu" ne sert pas.

3 - Le professeur écrit alors (au tableau ou sur transparent) :

La démonstration n'utilise pas la donnée "I est milieu de [BC]". On peut donc penser que cette démonstration reste vraie même si on change la place de I sur [BC].

Puis il demande oralement *"êtes-vous d'accord ?"*. Il projette alors un transparent avec la figure de l'exercice où I est situé au tiers de [BC], et dit : "*on vient de prouver que ce point (en montrant I) est milieu de [AE].*"
Il écrit alors au tableau : *"chaque groupe explique l'erreur en quelques phrases"*.

ECRIRE L'ENONCE

Vous trouvez sur une feuille de papier le texte suivant :

En utilisant la relation de Chasles, nous pouvons écrire :

$$\vec{IA} + \vec{IE} = \vec{IB} + \vec{BA} + \vec{IC} + \vec{CE} \qquad (1)$$

Or le point I est le milieu du segment [BC], donc :

$$\vec{IB} + \vec{IC} = \vec{O} \qquad (2)$$

De plus, le point E est le symétrique de D par rapport à C, donc

$$\vec{CE} = -\vec{CD} \qquad (3)$$

Compte tenu de (2) et (3), l'égalité (1) devient :

$$\vec{IA} + \vec{IE} = \vec{BA} - \vec{CD}$$

Or le quadrilatère ABCD est un carré, donc $\vec{BA} = \vec{CD}$, et nous obtenons finalement $\vec{IA} + \vec{IE} = \vec{O}$ ce qui prouve que I est le milieu du segment [AE].

Quel énoncé d'exercice vous paraît correspondre à cette rédaction de solution ?

LA DEMONSTRATION LITIGIEUSE

Dans cet encadré, voici l'énoncé de l'exercice étudié la dernière fois, et la démonstration proposée par l'un de vous.

Enoncé

ABCD est un carré, I est le milieu de [BC] et E est le symétrique de D par rapport à C.

Montrer que I est le milieu de [AE].

Démonstration

ABCD est un carré, alors [AD] est parallèle à [BC]. On sait que E est le symétrique de D par rapport à C, donc C est le milieu de [DE].

Dans le triangle ADE, la droite (CI) est parallèle à un côté [AD] et elle passe par le milieu d'un autre côté [DE], donc elle coupe le troisième côté [AE] en son milieu.
Donc, I est le milieu de [AE].

Voici le travail que tu dois faire :

1 - Tu soulignes d'une couleur différente chaque donnée de l'énoncé.

2 - En gardant la couleur choisie pour chaque donnée, tu soulignes, dans la démonstration, l'endroit où cette donnée est utilisée.

3 - Que constates-tu ?

COMMENTAIRES

Le but était de créer une situation de conflit cognitif pour obliger les élèves à réagir ; de ce point de vue l'objectif est atteint. Plusieurs sont vraiment déconcertés.

La formulation volontairement ouverte de la dernière question permet d'observer la démarche des élèves : où vont-ils rechercher l'erreur ?

Les attitudes sont extrêmement variées :

* certains sont en plein désarroi et regardent aussi bien l'énoncé que la démonstration.
* certains n'ont pas reconnu le théorème des milieux et passent un long moment à comprendre cette phrase.
* la plupart ont réalisé que l'erreur est due au non-emploi de la donnée "I milieu de [BC]" et essaient de l'intercaler un peu partout, sans se demander d'abord où elle est utile.
* plusieurs finissent pas se rendre compte que l'erreur se situe à la fin, mais sont incapables d'en formuler clairement la cause.
* certains essaient de modifier la rédaction, en utilisant un autre "théorème" : dans le triangle ADE, si C est le milieu de [DE], si (CI) est parallèle à (AD) et si CI = $\frac{AD}{2}$, I est le milieu de [AE].
* quelques groupes finissent quand même par énoncer :
  "(BI) passe par le milieu de [AE] ne veut pas dire que I est le milieu de [AE]".
  "On ne sait pas que I est sur (AE)".

Cette différence de comportement vient bien sûr de la différence de compréhension de la phrase : "la démonstration reste vraie si on change la place de I sur [BC]". Pour être d'accord avec cette phrase, il faut déjà maîtriser la relation entre la présence d'une donnée dans l'énoncé et l'utilisation de cette donnée dans la démonstration : une donnée, présente dans l'énoncé mais non utilisée, peut être supprimée sans changer la validité de la démonstration. Les élèves qui ont compris cela vont bien saisir la contradiction : si la donnée "I milieu de [BC]" ne sert pas, on peut la supprimer, et la démonstration, encore valable, prouve que tout point de [BC] est milieu de [AE] ... ce qui est absurde. Donc cette donnée doit servir.

Il est certain qu'aucun élève n'a fait explicitement ce raisonnement avant de répondre oui ou non à la question "Etes-vous d'accord ?" Certains de ceux qui ont répondu "oui" l'ont fait implicitement. Et ces élèves vont sans doute chercher l'erreur dans la démonstration.

Plusieurs répondent : non. Mais certains "non" signifient :

"c'est impossible que I soit aligné avec A et E si I n'est pas milieu de [BC]". Autrement dit, ils ne se prononcent pas sur la validité d'une démonstration n'utilisant pas certaine donnée lorsqu'on supprime cette donnée du texte. Ils ne se prononcent que sur la cohérence entre la conclusion de la démonstration et la réalité de la figure ainsi obtenue. Ce "non" signifie : "si on supprime cette donnée, I n'est pas milieu de [AE]" ; ces élèves vont aussi chercher à intercaler dans la démonstration la donnée "oubliée".

D'autres "non" signifient : "la démonstration n'est plus valable si on enlève une donnée ; on n'a pas le droit de changer le texte". Pour eux, c'est le prof qui fait une erreur en modifiant le texte. Pour ces élèves, il n'y a pas de contradiction apparente et cette activité ne les a sans doute pas persuadés de l'existence d'une faute de démonstration.

Les observations montrent aussi que les élèves sont "dressés" à utiliser toutes les données : "si on nous la donne, c'est que ça sert". Pour eux, la démonstration est fausse, simplement parce qu'elle n'utilise pas toutes les données.

On peut penser que la majorité des élèves a été convaincue de l'existence d'une erreur, mais cette fiche ne semble pas encore le bon moyen de leur apprendre à déceler une erreur. En fait, la tâche était ici assez difficile, pour plusieurs raisons :

- l'erreur se situe tout à la fin, et elle découle de l'emploi d'un théorème délicat (difficulté que nous reprendrons dans le paragraphe suivant).
- tout ce qui est écrit est juste ; il faut seulement rajouter une étape (l'alignement de A, I et E).
- cet alignement n'est pas facile à prouver.

IV - ANALYSE DES ERREURS ET DES DIFFICULTES DES ELEVES

Sans avoir atteint le but de notre recherche : "pourquoi l'alignement est-il si souvent oublié ?", on voit plusieurs causes, non spécifiques d'ailleurs aux problèmes d'alignement, qui concourent à créer la difficulté :

- le rôle de la figure : pour certains élèves, elle sert d'argument ; ils "constatent" un résultat, donc ce résultat est vrai.
- d'autres utilisent la conclusion comme donnée, avec ce raisonnement : puisque le prof demande de démontrer tel résultat, ce résultat est certainement vrai, donc on peut l'utiliser.

Dans ces deux cas bien sûr, c'est le rôle même de la démonstration qui n'est pas compris. Cette difficulté peut sans doute être surmontée partiellement en posant aux élèves des questions plus ouvertes, dont la réponse n'est pas évidente, et qui motivent la démonstration.

Il reste enfin deux sources de difficultés que nous allons évoquer plus longuement :

- la notion de milieu.
- l'emploi de certains théorèmes.

1 - Le milieu, notion complexe

En quoi la notion de milieu est-elle plus complexe qu'il n'y paraît au premier abord ?

Examinons deux extraits de copies d'élèves pour le problème suivant :

ABC est un triangle isocèle de sommet A, I est le milieu de [AC], D est le symétrique de B par rapport à I. Montrer que CA = CD.

Première copie

Je vais prouver que ADCB est un parallélogramme.
On sait que D est le symétrique de B par rapport à I, donc IB = ID. De plus, I est le milieu de [AC] ; [AC] et [BD] se coupant en leur milieu I, ADCB est donc un parallélogramme.

Deuxième copie

Montrons que ADCB est un parallélogramme.
On sait que AI = IC car I est milieu de [AC].
On sait que BI = ID car D est symétrique de B par rapport à I.
Or on sait qu'un quadrilatère qui a ses diagonales qui se coupent en leur milieu est un parallélogramme. Donc ADCB est un parallélogramme.

Dans ces démonstrations, c'est bien la donnée "milieu" qui est utile deux fois, mais les élèves éprouvent le besoin de la transformer en "longueurs égales", pour finalement utiliser un théorème nécessitant des milieux. Comme si l'information "IB = ID" était pour eux plus précise que "I est milieu de [BD]".

Il semble que pour les élèves, du moins pendant un certain temps, la phrase, "I est milieu de [BD]" comporte une information essentielle : "IB = ID" et une information secondaire : "les points I, B, D sont alignés". Tout se passe comme si la question "montrer que I est milieu de [BD]" faisait disparaître le reste du plan : puisque la question parle du segment [BD], on a changé d'univers ; on travaille maintenant sur la droite ou le segment [BD] et là, il suffit de prouver une égalité de longueurs.

Voici, à ce propos, un extrait de dialogue avec une classe, suite à un exercice où il s'agissait de montrer que A est le milieu de [EB].

Prof	*Est-ce que le texte dit que les points sont alignés ?*
Elève	*Non.*
Prof	*Est-ce qu'il fallait le démontrer ?*
Elève	*Non. Puisque vous demandez de prouver que A est milieu de [EB], c'est qu'il est sur [EB].Vous n'auriez quand même pas demandé ça pour un autre point !*

Cette réponse s'explique sans doute en partie par le passé des élèves. Les premières recherches qui leur sont proposées en collège sont souvent des situations où l'alignement fait partie des données, et il ne reste qu'à prouver l'égalité de longueurs à l'aide des nouveaux outils qu'ils viennent d'acquérir (Pythagore ...).

Il est vrai aussi qu'on n'énonce jamais de théorème du style : "Un point I est le milieu du segment [AB] si A, I, B sont alignés et si IA = IB."

Notre première tâche est donc de repérer les élèves qui fonctionnent sur le modèle "milieu = équidistance". Ils sont vite d'accord sur le fait que l'alignement n'est pas dans les données(si c'est le cas). Il est alors très utile de les faire s'exprimer, oralement ou par écrit, en posant la question : "*Pourquoi n'as-tu pas démontré l'alignement ?*"

La discussion qui en découle permettra de préciser le contrat :

- l'égalité de longueurs caractérise la médiatrice et non le milieu.

- tout ce qui n'est pas dit dans les données doit être démontré.

- parfois, lorsque l'alignement fait partie des données, on n'en parle pas dans la démonstration, mais c'est une négligence.

Mais il est certain que ce modèle est fortement enraciné et que la faute reviendra encore. Seul un travail de longue haleine permettra de la supprimer.

2 - Emploi d'un théorème délicat

Certains théorèmes sont l'occasion de plus de fautes que d'autres. C'est le cas par exemple du théorème des milieux. Pour comprendre les raisons de ce phénomène nous avons fait une enquête auprès des enseignants sur les énoncés qu'ils utilisent en classe, étudié des copies et des démarches d'élèves et analysé le contenu mathématique du théorème.

Voici un énoncé de ce théorème :

> **Théorème**
>
> Dans un triangle ABC, si I est le milieu de [AB] et J le milieu de [AC], la droite (IJ) est parallèle à (BC), et $IJ = \frac{BC}{2}$.

Ce sont 6 propositions qui sont articulées dans ce théorème :

I sur le segment [AB]

J sur le segment [AC]

$AI = IB$

$AJ = JC$

$(IJ) // (BC)$

$IJ = \frac{BC}{2}$

Avec 6 propositions il est naturel de rencontrer plusieurs réciproques. Il y en a en fait trois, dont deux s'expriment plus naturellement en termes de vecteurs à cause de problème d'orientation. Voici un énoncé simple de chacune d'elles :

Réciproque 1 : Si I milieu de [AB], (IJ) // (BC) et J sur [AC] alors J milieu de [AC] et $IJ = \frac{BC}{2}$.

Réciproque 2 : Si I milieu de [AB] et $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ alors J milieu de [AC].

Réciproque 3 : Si I sur [AB] et J sur [AC], si$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ alors I et J sont les milieux de [AB] et [AC].

Souvent la première réciproque est considérée comme étant le théorème. La troisième réciproque est refusée par la plupart des enseignants, alors qu'elle est énoncée par quelques uns.

Les énoncés des enseignants et des élèves sont en fait très divers. Pour chacun de ces théorèmes la conclusion comporte deux des six propositions énoncées ci-dessus.

On rencontre naturellement des énoncés dont la conclusion ne comporte qu'une des propositions. Par exemple voici un énoncé dérivé du théorème :

Dans le triangle ABC, si I milieu de [AB] et J milieu de [AC] , (IJ) est parallèle à (BC).

Les énoncés peuvent ne comporter aucun nom de point. Par exemple :

Pour le théorème :

La droite qui joint les milieux de deux cotés d'un triangle est parallèle au troisième côté.

Ou encore :

Le segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle a pour longueur la moitié du troisième côté.

Pour la réciproque 1 :

La droite qui passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un autre côté passe par le milieu du troisième côté.

Les énoncés peuvent être exprimés en termes de vecteurs, partiellement ou complètement, comme le montrent ces deux énoncés du théorème :

Dans le triangle ABC, si I milieu de [AB] et J milieu de [AC], $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

Dans le triangle ABC, si $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, alors $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

A l'inverse, certains enseignants se permettent d'énoncer la réciproque 2 sans vecteur et sans précision sur les problèmes de "sens".

Si I milieu de [AB], si (IJ) // (BC) et $IJ = \frac{BC}{2}$ alors J milieu de [AC]

Dans la réciproque 1 on rencontre trois formulations assez différentes :

En termes de projection :

> Dans la projection de (AB) sur (AC) parallèlement à (BC), le milieu I de [AB] se projette sur le milieu J de [AC].

En termes d'intersection de droites :

> Dans un triangle ABC, si I est le milieu de [AB], la parallèle à (BC) passant par I coupe [AC] en son milieu.

En termes de points alignés :

> Dans un triangle ABC, si I est le milieu de [AB], si J est aligné avec A et C, et (IJ) // (BC), alors J est le milieu de [AC].

Un énoncé un peu inattendu pour la réciproque 3, le point A y étant défini après coup :

> Si $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, si A est le point d'intersection de (IB) et de (JC), I et J sont les milieux de [AB] et [AC].

On trouve un énoncé faux qui est proche de ce dernier :

> Dans un triangle ABC, si $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, I et J sont les milieux de [AB] et de [AC].

Des variations plus mineures de langage apparaissent : l'allusion au triangle peut disparaître, au lieu de parler de "parallèle à un côté" on dit "parallèle au support d'un côté", au lieu de "qui passe par" on rencontre "menée par", au lieu de "J est sur [AB]" on écrit aussi "J est sur (AB)". Dans les énoncés en forme de "si alors", le "alors" peut disparaître. Les noms des points peuvent changer, et aussi la disposition de la figure, quand il y en a.

3 - Les difficultés des élèves

La première difficulté des élèves devant un théorème compliqué est de bien comprendre sa structure, et donc son rôle : quelles en sont les données, quelle est la conclusion, autrement dit que permet-il de prouver ? Il semble qu'en entrant en seconde la plupart des élèves ont bien compris qu'un théorème est un outil permettant d'aboutir à une conclusion, et l'emploient à bon escient dans le cas de théorèmes simples (voir "rédigez en liberté"). Mais s'ils maîtrisent mal son contenu, ils risquent fort de mal l'employer. Ainsi le théorème des milieux et ses réciproques permettent de prouver soit un parallélisme, soit une égalité de longueurs, soit un milieu, mais pas un alignement qui figure toujours dans les hypothèses. L'existence de plusieurs réciproques raisonnables crée une certaine confusion. Le nombre important d'hypothèses est également une difficulté, car il est plus difficile de penser à vérifier toutes les hypothèses avant d'appliquer le théorème dans une démonstration. La variété des énoncés, leur complexité linguistique sont aussi une grande difficulté. Par exemple, l'expression "coupe le troisième côté en son milieu" ne peut être considérée du point de vue du langage comme équivalente à "si J est sur [AC], J est le milieu de [AC]" car la séparation hypothèse-conclusion est moins nette dans le premier cas. On observe dans ce cas l'oubli de vérifier que J est sur [AC] pour conclure que J est le milieu de [AC].

Un phénomène identique peut être observé pour un théorème plus simple et très familier pour les élèves : "les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu". Celui-ci peut aussi s'énoncer : "Dans un parallélogramme le milieu d'une diagonale est aussi le milieu de l'autre". Beaucoup d'enseignants considèrent en première analyse que ces deux énoncés sont équivalents. Pourtant ils ne comportent pas en fait les mêmes hypothèses ni la même conclusion ni les mêmes quantificateurs. Le texte de démonstration : "On sait que ABCD est un parallélogramme ; comme I est le milieu de [AC], c'est aussi le milieu de [BD]" correspond au deuxième énoncé, le premier conduisant en principe à une démonstration en deux pas : "On sait que ABCD est un parallélogramme, donc [AC] et [BD] ont même milieu. Comme I est le milieu de [AC], c'est aussi le milieu de [BD]". Bien sûr peu d'enseignants vont s'intéresser à cette nuance. Il n'empêche qu'elle peut contribuer à mettre un flou dans l'esprit de certains élèves sur le point essentiel : "quand on veut utiliser un théorème dans un pas de démonstration, on s'assure que les hypothèses sont dans les données ou déjà démontrées, puis on énonce la conclusion".

Notons enfin que les figures prototypes associées à ce théorème ont en général deux parallèles horizontales et il n'est pas étonnant que les élèves ne reconnaissent pas la situation quand les parallèles sont dans une autre direction.
Comment aider les élèves à s'y retrouver ? Certains énoncés, pourtant corrects, ne font pas partie de la "panoplie" admise par l'ensemble des collègues, et il faut donc prévenir les élèves du danger d'inventer un énoncé en se fiant à leur intuition.

Par contre, il ne paraît pas souhaitable d'obliger les élèves à adopter tous la même formulation pour un théorème donné. Au contraire, un travail effectif (analyse, classement) à partir d'énoncés proposés par les élèves eux-mêmes nous semblent plus pertinent. On constate à ce sujet que certains élèves ont besoin de l'appui d'un énoncé appris par coeur. Même si pour certains d'entre eux cela s'avère très efficace, il est nécessaire de ne pas renoncer à travailler avec eux sur d'autres formulations. D'une part cela permettra aux meilleurs de s'adapter plus facilement aux diverses formulations qu'ils rencontrent dans leur scolarité, d'autre part, pour les plus en difficulté, ce sera une occasion de réfléchir au contenu mathématique du théorème.

En conclusion, il apparaît que l'oubli de l'alignement dans une rédaction recouvre en fait plusieurs situations distinctes :

* le "contrat" est mal compris : l'élève considère que l'alignement est admis implicitement et qu'il suffit de démontrer une égalité de longueurs ; ou encore que l'observation de la figure remplace une démonstration.

* l'élève a du mal à analyser la formulation d'un théorème compliqué et à y repérer les hypothèses.

* l'élève se laisse piéger par la figure et oublie de vérifier une hypothèse.

Ces quelques résultats ne prétendent pas faire le tour de la question, mais espèrent fournir des pistes permettant de mieux comprendre les comportements des élèves dans bon nombre de situations.