Fiche 5

Triangle, es-tu rectangle ?

Guillaume, Noémie et Bastien ont rédigé des démonstrations pour des problèmes que le professeur leur a donnés. Celui-ci, au moment de la correction, leur reproche de ne pas avoir indiqué dans leur démonstration le théorème qu'ils utilisent. Guillaume, Bastien et Noémie en consultant leur livre et leur cahier trouvent les énoncés de théorèmes qui sont dans le tableau.

Peux-tu les aider à compléter leurs démonstrations en indiquant, pour chaque énoncé de théorème, la démonstration dans laquelle il peut servir.

PROBLÈME DE GUILLAUME ET DE BASTIEN

Un triangle ABC a des côtés de longueur : AB = 3, AC = 5 et BC = 6. Ce triangle est-il rectangle en A ?

DÉMONSTRATION DE GUILLAUME

Calculons $AB^2 + BC^2$ et BC^2.
On obtient : $AB^2 + AC^2 = 9 + 25 = 34$ et $BC^2 = 36$.
On constate que $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$. Donc le triangle n'est pas rectangle en A.

DÉMONSTRATION DE BASTIEN

Supposons que le triangle ABC soit rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore, on aurait $AB^2 + AC^2 = BC^2$. Or $AB^2 + AC^2 = 9 + 25 = 34$ et $BC^2 = 36$. Il y a donc une contradiction. On en déduit que le triangle ABC n'est pas rectangle en A.

PROBLÈME DE NOÉMIE

Un triangle ABC a des côtés de longueur : AB = 65, AC = 72 et BC = 97. Ce triangle est-il rectangle en A ?

DÉMONSTRATION DE NOÉMIE

Calculons $AB^2 + BC^2$ et BC^2.
On obtient : $AB^2 + BC^2 = 65^2 + 72^2 = 4225 + 5184 = 9409$ et $BC^2 = 9409$.
On constate que $AB^2 + AC^2 = BC^2$. Donc le triangle est rectangle en A.

Triangle, es-tu rectangle ?
Fiche de réponses

	Énoncés de théorème	**A qui peut servir ce théorème ?**
1	Si on sait que MNP est un triangle tel que $MP^2 + MN^2 = PN^2$ alors on peut dire que MNP est triangle rectangle en M.	***à Noémie***
2	Si la somme des carrés des longueurs de deux côtés d'un triangle est égal au carré de la longueur du troisième côté, alors ce triangle est rectangle et a pour hypoténuse ce troisième côté.	
3	Si un triangle ABC est rectangle en A alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$.	
4	Si l'on constate que $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$, alors le triangle ABC n'est pas rectangle en A.	
5	Si un triangle est rectangle alors la somme des carrés des côtés de l'angle droit est égale au carré de l'hypoténuse.	
6	Dans un triangle MNP, rectangle en M et d'hypoténuse $[PN]$, on a $MP^2 + MN^2 = PN^2$. Ce résultat est l'énoncé de Pythagore.	
7	Dans un triangle rectangle, dont l'hypoténuse est de longueur a et dont les autres côtés sont de longueur b et c, on a l'égalité : $a^2 = b^2 + c^2$.	
8	Dans un triangle GAZ où $GA^2 + GZ^2 = AZ^2$, les deux côtés $[GA]$ et $[GZ]$ sont perpendiculaires.	
9	Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux côtés de l'angle droit.	
10	Dans un triangle EAU tel que $EA^2 + EU^2 = AU^2$, l'angle $\widehat{AEU}$ est droit.	
11	Si le carré de la longueur du plus grand côté n'est pas égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle n'est pas rectangle.	

Difficultés des élèves

c) Et si on supposait !

En général les élèves ont du mal à faire la démarche de « supposer » pour commencer un raisonnement par l'absurde ; on a observé le dialogue suivant entre deux élèves : « *Cela pourrait être Bastien car il suppose que le triangle est rectangle* ». « *Oui, il suppose mais il ne sait pas* ». Le deuxième élève ne semble pas mûr pour accepter un raisonnement par l'absurde qui nécessite justement de supposer.
L'énoncé 5 qui commence par *:* « *si un triangle est rectangle…* » paraît pour certains ne convenir à aucune copie puisque « *personne ne dit cela* ». « *Personne au début ne dit qu'il est rectangle* ». Là encore le lien n'est pas fait avec le « *supposons que le triangle soit rectangle* » du raisonnement par l'absurde. Cette difficulté n'en est pas une pour les autres élèves : « *C'est Bastien, car il a dit tout suite qu'il est rectangle* ».
Par contre certains « *supposent* » à tort ce qu'ils cherchent à démontrer. « *On va dire que le triangle est rectangle, on va faire les calculs et on va voir qu'il est bien rectangle* ».

d) Contraposée

La difficulté vient de la présence de deux négations dans la contraposée, ce qui conduit certains élèves à mettre cet énoncé à part et à regrouper le théorème direct et sa réciproque ensemble. Certains élèves trouvent que la contraposée va mieux avec le théorème réciproque qu'avec le théorème direct, car, dans les deux cas, on part de la longueur des côtés.
D'autres élèves présentent un lien entre contraposée et théorème direct.
Pour l'énoncé 4 (contraposée) on a observé la discussion : « *Pourquoi mettre Guillaume à la 4 et pas Bastien. Guillaume fait d'abord les calculs alors que Bastien fait en général. Je trouve que ça correspond mieux* ».
Autre observation sur ce lien : « *Bastien et Guillaume disent que c'est pas vrai* (faisant allusion au fait que le triangle est rectangle), *Noémie, elle dit que c'est vrai* ». « *Pour le 2, c'est rectangle, c'est Noémie* ».
Il n'est pas étonnant qu'en 4$^{\text{ème}}$ les élèves ne fassent pas le rapport entre la contraposée et le théorème direct. Bien entendu il n'est pas question d'employer le mot « contraposée » avec les élèves et de démontrer l'équivalence avec le théorème direct au collège ni même au lycée.