I – La conception des fiches

Notre idée est de présenter aux élèves plusieurs énoncés de problèmes et plusieurs démonstrations et de leur demander d'associer chaque démonstration à l'énoncé qui convient (idée déjà expérimentée en 4$^{\text{ème}}$ et présentée dans « Quelles lectures pour quelles tâches ? », IREM de Rennes).

Nos activités ont pour objet de faire comprendre aux élèves qu'une démonstration n'est pas bonne dans l'absolu : elle peut convenir à un énoncé et ne pas convenir à un autre.

La compréhension du rôle singulier joué dans la démonstration par les données du problème est fondamentale. Dans ce but, il est essentiel de surmonter les difficultés de lecture et, en particulier, celles des mots de liaison. Plus précisément, il s'agit de reconnaître (tâche inhabituelle) qu'une démonstration est fausse si elle contient comme donnée d'un pas une proposition qui ne figure pas dans l'énoncé, qui n'est pas déjà démontrée ou qui ne résulte pas d'une construction d'objets nouveaux faite par celui qui résout le problème.

Les deux activités proposées, « Le losange de Cesson » (Fiche 1, page 11) et « Le parallélogramme de Saint-Méen » (Fiche 2, page 16) n'utilisent que des notions et des propriétés rencontrées en 5$^{\text{ème}}$. Ces fiches peuvent donc être utilisées à n'importe quel moment en 4$^{\text{ème}}$. On peut imaginer une situation plus simple sur les mêmes thèmes pour réaliser une activité en fin de 5$^{\text{ème}}$.

a) Les difficultés de conception

La première difficulté est d'obtenir une lecture qui ne soit pas superficielle. Pour cela nous avons essayé de choisir trois énoncés qui correspondent à la même figure et qui posent la même question ; simplement les données du problème sont différentes. De cette façon les différences entre les démonstrations proviennent uniquement de la nature des propositions utilisées comme données.

Une deuxième difficulté est de présenter aux élèves des démonstrations qui leur donneraient une bonne représentation des contraintes et des libertés d'écriture. Des démonstrations au style stéréotypé seraient moins adaptées pour cet objectif. Des démonstrations qui ne présentent pas « dans l'ordre » les pas de démonstration peuvent faire prendre conscience aux élèves de l'importance des mots de liaison. Dans ce cas, en effet, les mots jouent un rôle essentiel pour comprendre quelles sont les données et la conclusion de chaque pas. Mais il ne faut pas non plus désorienter complètement les élèves par des textes trop éloignés de la pratique habituelle. Nous avons eu de nombreuses discussions pour tendre vers un juste équilibre.

b) Les fiches auxquelles nous avons abouti

Nous avons mis au point deux fiches dans cet esprit : « Le losange de Cesson » et « Le parallélogramme de Saint-Méen ». La première est plus difficile à la fois par la complexité du problème posé (par exemple dans l'énoncé 3 du « Losange de Cesson », la phrase « Soit E un point de (AB) équidistant de B et C » suppose une construction complexe pour faire la figure) et par la longueur des textes de démonstration à étudier (La démonstration B du « Losange de Cesson » qui utilise les angles est particulièrement ardue aux yeux des élèves).

Nous avons expérimenté plusieurs versions de ces fiches ; « Le parallélogramme de Saint-Méen » dans deux 4$^{\text{ème}}$ du collège de Cesson et trois 4$^{\text{ème}}$ du collège de Saint-Méen, « Le losange de Cesson », dans une 4$^{\text{ème}}$ du collège de Cesson, dans une 4$^{\text{ème}}$ du collège de Saint-Méen, dans une 2$^{\text{nde}}$au lycée Bréquigny de Rennes et dans une 2$^{\text{nde}}$au lycée Jacques

Cartier de Saint-Malo. Ces expérimentations nous ont permis de les mettre au point et de mieux connaître les difficultés des élèves.

Nous avons choisi de mettre sur ces fiches une figure qui convient aux trois énoncés. Cela dégage un temps non négligeable pour se concentrer sur l'essentiel de l'activité. Cependant, dans ces conditions, les élèves ne refont pas eux-mêmes la figure et utilisent rarement un codage pour noter les données sur la figure. C'est pourquoi nous leur proposons trois figures identiques, avec comme consigne de les coder en tenant compte de chacun des énoncés.

La question posée concerne les arguments qui permettent de dire pourquoi une démonstration ne convient pas à un énoncé. Il nous paraît en effet impossible, pour un élève de 4ème, de trouver, et même de comprendre, les arguments qui expliqueraient pourquoi une démonstration convient à un énoncé. Pour que les élèves comprennent bien ce que l'on attend d'eux, nous avons opté pour une fiche-réponse, incitant ainsi les élèves à bien justifier pourquoi telle démonstration ne convient pas à tel énoncé.

Pour le choix des textes de démonstration, nous avons modifié ceux que nous avions initialement choisis. Nous les avons raccourcis et surtout nous avons supprimé certaines tournures inhabituelles ; par exemple : « considérons » remplacé par « soit », « droite menée par » remplacé par « droite passant par ».

Pour « Le parallélogramme de Saint-Méen », nous avons choisi des lettres pour désigner les points qui permettent d'éviter les confusions entre les différents parallélogrammes de la figure.

Fiche 1

Le losange de Cesson

Voici 3 énoncés de problèmes et 4 démonstrations qui correspondent à la même figure avec la même question.

Un enseignant a rédigé pour chacun de ces énoncés une ou deux démonstrations, mais il a oublié d'indiquer l'énoncé correspondant à chacune de ces démonstrations.

Travail demandé :

Après avoir déterminé pour chaque démonstration l'énoncé auquel elle correspond, explique pour chaque démonstration comment tu peux savoir qu'elle ne convient pas à chacun des autres énoncés. Ecris tes réponses sur la fiche.

EXEMPLE DE REPONSE :

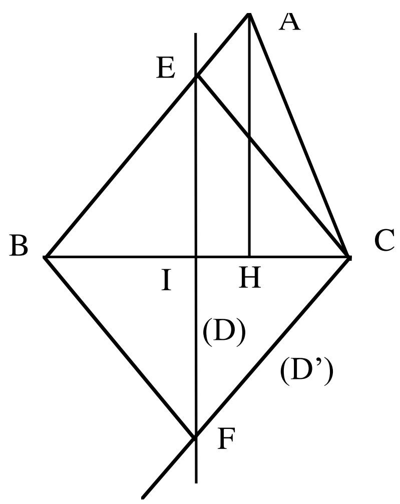
La démonstration B ne convient pas à l'énoncé 1 parce que EB = EC n'est pas une donnée du problème.

Énoncé 1

Soit ABC un triangle quelconque de hauteur [AH].
Soit I le milieu de [BC]. La parallèle (D) à (AH) passant par I coupe (AB) en E.
Placer F pour que I soit le milieu de [EF].
Montrer que CEBF est un losange.

Énoncé 2

Soit ABC un triangle quelconque de hauteur [AH].
Soit (D) la médiatrice de [BC].
(D) coupe (BC) en I et coupe (AB) en E.
On construit, sur la droite (D), un point F différent du point E tel que BE = BF.
Montrer que CEBF est un losange.



Énoncé 3

Soit ABC un triangle quelconque de hauteur [AH].
Soit E un point de (AB) équidistant de B et C.
Soit (D) la parallèle à (AH) passant par E.
Soit (D') la parallèle à (AB) passant par C.
(D) et (D') se coupent en F et (D) coupe (BC) en I.
Montrer que CEBF est un losange.

…\…

Le losange de Cesson (Fiche 1)

Démonstration A

Pour montrer que CEBF est un losange, il suffit de montrer que ses 4 côtés sont égaux.

On sait déjà d'après l'énoncé que EB = FB.

Comme (D) est la médiatrice de [BC] et que E et F sont des points de (D), on a EB = EC et FB = FC. En effet tout point de la médiatrice d'un segment est équidistant des extrémités de ce segment.

Les trois égalités obtenues nous donnent le résultat.

Démonstration B

Les droites (EF) et (AH) étant parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre. Comme (BC) est perpendiculaire à (AH) par hypothèse, (BC) est perpendiculaire à (EF).

Considérons le triangle EBC. Il est isocèle en E puisque EB = EC.

La droite (EF) étant perpendiculaire à (BC), c'est la hauteur issue de E. C'est donc aussi la médiatrice de [BC] et la bissectrice de l'angle $\widehat{BEC}$.

On en déduit d'une part que $\widehat{BEF} = \widehat{FEC}$, et d'autre part que FC = FB, car tous les points de la médiatrice d'un segment sont équidistants des extrémités de ce segment.

Les droites (EB) et (CF) étant parallèles et coupées par la sécante (EF), les angles alternes internes $\widehat{BEF}$ et $\widehat{CFE}$ sont égaux.

On en déduit $\widehat{FEC} = \widehat{CFE}$.

Comme le triangle CEF a ses angles à la base égaux, il est isocèle en C ; donc CE = CF.

On sait déjà que CE = EB et que CF = FB.

Ainsi le quadrilatère CEBF a ses quatre côtés égaux ; c'est donc un losange.

Démonstration C

Pour prouver que CEBF est un losange il suffit de montrer que ses diagonales sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu.

On sait que, si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est également perpendiculaire à l'autre.

Or (IE) parallèle à (AH). De plus (IE) est confondu avec (EF) car I est le milieu de [EF].

Comme, dans le triangle ABC, (AH) est une hauteur, elle est perpendiculaire à (BC). Par conséquent (EF) est perpendiculaire à (BC).

Comme, par hypothèse, I est milieu de [BC] et de [EF], CEBF est un losange.

Démonstration D

(D) est la médiatrice de [BC] et elle coupe [BC] en I ; donc I est milieu de [BC]. Comme les points E et F appartiennent à (D), (EF) et (BC) sont perpendiculaires en I.

Or BE = BF ; le triangle BEF a deux côtés égaux ; il est donc isocèle en B.

Puisque I est sur (BC), (BI) et (EF) sont perpendiculaires ; [BI] est donc la hauteur issue de B dans le triangle BEF.

Dans un triangle isocèle, la hauteur issue du sommet principal est aussi la médiatrice de la base. Donc I est milieu de [EF].

Comme I est aussi le milieu de [BC] et que (BC) est perpendiculaire à (EF), le quadrilatère a ses diagonales qui se coupent perpendiculairement en leur milieu ; c'est donc un losange.

Le losange de Cesson
Fiche de réponses

Groupe : .... Classe : ……
....
....
....

Complète les pointillés par 1, 2 ou 3

La démonstration A convient à l'énoncé .....

La démonstration A ne convient pas à l'énoncé ….. parce que :

La démonstration A ne convient pas à l'énoncé ….. parce que :

La démonstration B convient à l'énoncé .....

La démonstration B ne convient pas à l'énoncé ….. parce que

La démonstration B ne convient pas à l'énoncé ….. parce que :

La démonstration C convient à l'énoncé .....

La démonstration C ne convient pas à l'énoncé ….. parce que :

La démonstration C ne convient pas à l'énoncé … parce que :

La démonstration D convient à l'énoncé .....

La démonstration D ne convient pas à l'énoncé ….. parce que :

La démonstration D ne convient pas à l'énoncé ….. parce que :

Aide pour le Losange de Cesson

Vous pouvez, si vous le souhaitez, coder ces figures pour mieux comprendre chacun des énoncés.

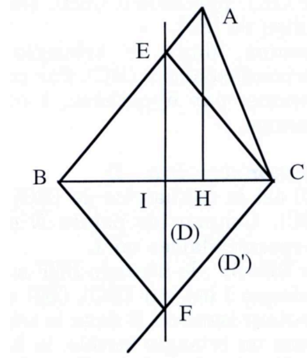
Énoncé 1

Soit ABC un triangle quelconque de hauteur [AH].

Soit I le milieu de [BC]. La parallèle (D) à (AH) passant par I coupe (AB) en E.

Placer F pour que I soit le milieu de [EF].

Montrer que CEBF est un losange.



Énoncé 2

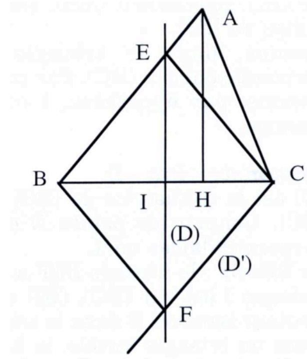
Soit ABC un triangle quelconque de hauteur [AH].

Soit (D) la médiatrice de [BC].

(D) coupe (BC) en I et coupe (AB) en E.

On construit, sur la droite (D), un point F différent du point E tel que BE = BF.

Montrer que CEBF est un losange.



Énoncé 3

Soit ABC un triangle quelconque de hauteur [AH].

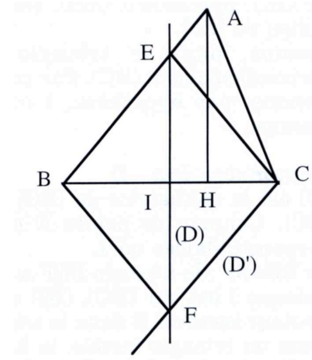
Soit E un point de (AB) équidistant de B et C.

Soit (D) la parallèle à [AH] passant par E.

Soit (D’) la parallèle à (AB) passant par C.

(D) et (D’) se coupent en F et (D) coupe (BC) en I.

Montrer que CEBF est un losange.



Fiche 2

Le parallélogramme de Saint-Méen

Voici 3 énoncés de problèmes et 3 démonstrations qui correspondent à la même figure avec la même question.

Un enseignant a rédigé pour chacun de ces énoncés une ou deux démonstrations, mais il a oublié d'indiquer l'énoncé correspondant à chacune de ces démonstrations.

Travail demandé :

Après avoir déterminé pour chaque démonstration l'énoncé auquel elle correspond, explique pour chaque démonstration comment tu peux savoir qu'elle ne convient pas à chacun des autres énoncés. Ecris tes réponses sur la fiche.

EXEMPLE DE REPONSE :

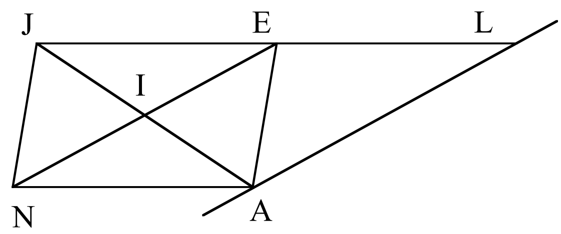
La démonstration C ne convient pas à l'énoncé 1 parce que (AL) // (NE) n'est pas une donnée de l'énoncé 1.

Énoncé 1

Soient les points A, N, J, E, L et I tels que :

- N et E sont symétriques par rapport à I
- J et A sont symétriques par rapport à I
- J et L sont symétriques par rapport à E

Montrer que ELAN est un parallélogramme.



Énoncé 2

Soit NJE un triangle quelconque. Soit I le milieu de [NE] et A le symétrique de J par rapport au point I. On mène par A la parallèle à la droite (NE) ; elle coupe la droite (JE) en L.

Montrer que ELAN est un parallélogramme

Énoncé 3

Soit JEAN un parallélogramme de centre I et soit L le symétrique de J par rapport à E.

Montrer que ELAN est un parallélogramme.

Le parallélogramme de Saint-Méen (Fiche 2)

Démonstration A

JEAN est un parallélogramme, donc (NA) // (JE) et NA = JE. J et L sont symétriques par rapport à E, donc JE = EL et J, E et L sont alignés. D'où NA = EL et (NA) // (EL).

Un quadrilatère ayant deux côtés opposés parallèles et de même longueur est un parallélogramme ; donc ELAN est un parallélogramme.

Démonstration B

En utilisant la symétrie de centre I, on a I milieu de [NE] et I milieu de [JA] ; les segments [NE] et [JA] ont donc même milieu. Or un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme. Donc JEAN est un parallélogramme et, par suite, (NA) // (JE) et NA = JE. Comme J et L sont symétriques par rapport à E, alors JE = EL et les droites (JE) et (EL) sont confondues. On en déduit que NA = EL et (NA) // (EL).

ELAN est par conséquent un parallélogramme, car il a deux côtés opposés parallèles et de même longueur.

Démonstration C

Pour montrer que ELAN est un parallélogramme, il suffit de démontrer que ses côtés opposés sont parallèles deux à deux. On sait déjà que (AL) // (NE). Montrons que (NA) // (EL).

Comme J est le symétrique de A par rapport à I, I est le milieu du segment [JA]. Or I est aussi le milieu de [NE] ; donc le quadrilatère JEAN est un parallélogramme, puisque ses diagonales se coupent en leur milieu. On en déduit que (NA) // (JE).

Comme les droites (JE) et (EL) sont confondues, on a (NA) // (EL), ce qui achève la démonstration.

Le Parallélogramme de Saint-Méen
Fiche de réponses

Groupe : .... Classe : ……
....
....
....

Complète les pointillés par 1, 2 ou 3

La démonstration A convient à l'énoncé .….

La démonstration A ne convient pas à l'énoncé ….. parce que :

La démonstration A ne convient pas à l'énoncé ….. parce que :

La démonstration B convient à l'énoncé .….

La démonstration B ne convient pas à l'énoncé ….. parce que

La démonstration B ne convient pas à l'énoncé ….. parce que :

La démonstration C convient à l'énoncé .….

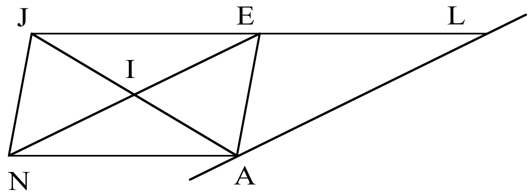
La démonstration C ne convient pas à l'énoncé ….. parce que :

La démonstration C ne convient pas à l'énoncé ... parce que :

Aide pour le parallélogramme de Saint-Méen

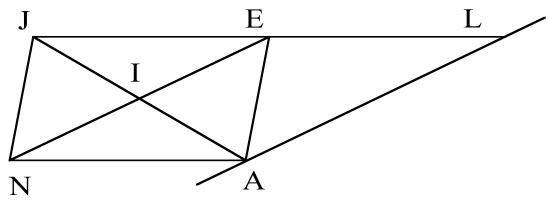
Vous pouvez, si vous le souhaitez, coder ces figures pour mieux comprendre chacun des énoncés.

Énoncé 1

<table>
<tr>
<td>
Soient les points A, N, J, E, L et I tels que :
- N et E sont symétriques par rapport à I
- J et A sont symétriques par rapport à I
- J et L sont symétriques par rapport à E
Montrer que ELAN est un parallélogramme.
</td>
<td>


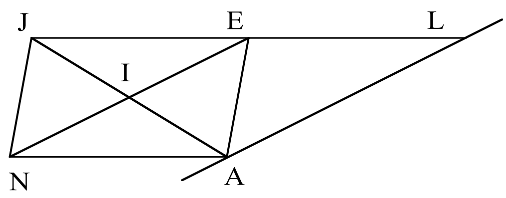
</td>
</tr>
</table>

Énoncé 2

<table>
<tr>
<td>
Soit NJE un triangle quelconque. Soit I le milieu de [NE] et A le symétrique de J par rapport au point I. On mène par A la parallèle à la droite (NE) ; elle coupe la droite (JE) en L.
Montrer que ELAN est un parallélogramme.
</td>
<td>


</td>
</tr>
</table>

Énoncé 3

<table>
<tr>
<td>
Soit JEAN un parallélogramme de centre I et soit L le symétrique de J par rapport à E.
Montrer que ELAN est un parallélogramme.
</td>
<td>


</td>
</tr>
</table>

II – Bilan des activités

1) Les réponses attendues

Après les expérimentations, notre point de vue a changé sur les réponses que l'on peut attendre et accepter.

Bien sûr, nous attendions, pour expliquer qu'une démonstration ne convient pas à un énoncé, un argument du type : « telle chose est une donnée dans la démonstration et pas dans l'énoncé ». Il est d'ailleurs plus souvent exprimé plus brièvement : « l'énoncé ne dit pas telle chose ». Nous pensions que, pour cet argument, les élèves choisiraient la première affirmation qui n'est pas une donnée : ça n'a pas été toujours le cas.

Un autre argument consiste à dire : « telle chose est démontrée alors que c'est une donnée de l'énoncé ». Nous n'attendions pas ce type d'argument. Cependant, à la réflexion, il nous paraît recevable.

Enfin, l'argument « tel théorème utilisé dans la démonstration n'est pas utile dans la situation décrite par l'énoncé » est aussi tout à fait recevable.

Voici, pour faciliter la correction des réponses des élèves, deux tableaux donnant les réponses possibles pour « Le losange de Cesson » et pour « Le parallélogramme de Saint-Méen ».

Les réponses possibles pour « Le losange de Cesson »

	Première affirmation qui n'est pas une donnée	Autres affirmations qui ne sont pas des données	Choses démontrées alors qu'elles sont des données	Autre argument
A ne convient pas à 1	EB = FB	D médiatrice de [BC]		
A ne convient pas à 3	EB = FB	D médiatrice de [BC]	EB =EC	
B ne convient pas à 1	EB = EC	(EB) // (CF)		
B ne convient pas à 2	(EF) // (AH)	EB = EC (EB) // (CF)	Médiatrice de [BC]	Théorème parallèle, perpendiculaire à l'envers
C ne convient pas à 2	(IE) // (AH)	I milieu de [EF]	(EF) perpendiculaire à (BC)	
C ne convient pas à 3	I milieu de [EF]	I milieu de [BC]		
D ne convient pas à 1	D médiatrice de [BC]	BE = BF	I milieu de [BC]	
D ne convient pas à 3	D médiatrice de [BC]	BE = BF	I milieu de [EF]	

Les réponses possibles pour « Le parallélogramme de Saint-Méen »			
	Première affirmation qui n'est pas une donnée	Autres affirmations qui ne sont pas des données	Choses démontrées alors qu'elles sont des données
A ne convient pas à 1	JEAN est un parallélogramme		
A ne convient pas à 2	JEAN est un parallélogramme	J et L symétriques par rapport à E	
B ne convient pas à 2	J et L symétriques par rapport à E		
B ne convient pas à 3	On ne sait rien sur la symétrie de centre I		JEAN est un parallélogramme
C ne convient pas à 1	(AL) // (NE)	I milieu de [NE]	
C ne convient pas à 3	J symétrique de A par rapport à I	I milieu de [NE]	JEAN est un parallélogramme

2) L'analyse des copies

L'analyse des copies reste un exercice difficile. Par exemple en discutant de la copie ci-dessous on s'est aperçu qu'on peut avoir sur elle des avis très différents.

UNE COPIE DE 4EME POUR « LE PARALLELOGRAMME DE SAINT-MEEN »

La démonstration C correspond à l'énoncé 1

La démonstration A ne convient pas à l'énoncé 1 parce qu'ils ne parlent pas du Point I dans la démonstration.

La démonstration B ne convient pas à l'énoncé 1 parce qu'ils disent que JEAN est un parallélogramme dans la démonstration mais pas dans l'énoncé.

La démonstration B convient à l'énoncé 2.

La démonstration A ne convient pas à l'énoncé 2 parce qu'ils disent que JEAN est un parallélogramme dans la démonstration mais pas dans l'énoncé.

Pas d'explication pour la démonstration C ne convient pas à l'énoncé 2.

La démonstration A convient à l'énoncé 3 parce qu'on ne sait pas encore que I est le milieu de [JA] et de [NE].

La démonstration C ne convient pas à l'énoncé 3 parce qu'ils disent qu'on sait déjà que (NE) // (AL), mais non ce n'est pas vrai.

Dans une interprétation pessimiste, on peut estimer que l'élève utilise de mauvaises idées pour comparer les informations contenues dans la démonstration et dans l'énoncé. En effet la deuxième réponse, « A ne convient pas à 1 parce qu'ils ne parlent pas du point I dans la démonstration », correspond à la stratégie erronée : « tout ce qui est dans l'énoncé doit être dans la démonstration ». La troisième réponse « ils disent que JEAN est un parallélogramme dans la démonstration B mais pas dans l'énoncé 1 », fait apparaître l'incapacité de distinguer dans la démonstration ce qui est donnée de ce qui est déduit. Enfin, la seule association réussie, la démonstration A avec l'énoncé 3, est peut-être obtenue avec l'argument : « l'énoncé et la démonstration commencent pareil ».

On peut, au contraire, interpréter les erreurs de manière optimiste. La première réponse « C convient à 1 » s'expliquerait parce que l'élève opère par élimination ; il pense avoir trouver que les démonstrations A et B ne conviennent pas à 1 et c'est donc la démonstration C. La deuxième réponse est finalement acceptable car le point I est ici très important dans l'énoncé puisqu'il permet de situer N par rapport à E et J par rapport à A. Pour la troisième, il peut s'agir d'une simple confusion entre les démonstrations A et B. Pour la quatrième réponse, « B convient à 2 », l'élève a pu procéder encore une fois par élimination ; elle constate que la démonstration A ne convient pas à 2 (cinquième réponse correcte) et la démonstration C est déjà prise par I. Le fait qu'il n'y ait rien pour expliquer que la démonstration C ne convient pas à 2 est encourageant puisque C convient à 2. Enfin les trois dernières réponses sont acceptables même si l'argument pour rejeter la démonstration B est un peu faible : bien sûr on sait que JEAN est un parallélogramme, mais il n'est pas écrit que I est milieu de [JA] et [NE]. La copie se terminant mieux qu'elle ne commence, n'y a-t-il pas une certaine progression de l'élève dans la compréhension de ce qu'est une démonstration ?

3) Les difficultés des élèves

a) La lecture

La plupart des élèves n'ont pas de réelles difficultés de lecture. Cependant certains sont découragés par la longueur du texte à lire. Il s'agit plutôt d'un manque de motivation pour la lecture d'un texte long.

On constate aussi que, pour les élèves moyens ou en difficulté, la lecture est souvent un « zapping » du texte. Ils repèrent des propositions, mais, ne voyant pas les mots de liaison, ils ne savent pas s'il s'agit d'une hypothèse ou d'une conclusion intermédiaire ; par exemple, dans la démonstration C du « Losange de Cesson », « (EF) est perpendiculaire à (BC) » est parfois pris pour une donnée.

Quelques difficultés liées à certaines expressions :

- le mot hypothèse prête à discussion, en particulier parce qu'en Sciences de la Vie il est utilisé dans le sens de conjecture,
- le mot orthogonal n'est pas familier,
- l'expression « la parallèle (D) à (AH) » n'est pas comprise et induit la question : « quelle est la parallèle (D) ? »,
- l'expression « un point distinct de E » provoque la question : « qu'est-ce qu'un point distinct ? »

b) Comprendre la consigne

La tâche est nouvelle pour les élèves. La fiche réponse que nous proposons les aide beaucoup à comprendre la consigne.

Cependant, certains cherchent des fautes dans les démonstrations au lieu de chercher à quel énoncé elles conviennent et à quels énoncés elles ne conviennent pas.

Avec les fiches initiales, certains essayaient d'écrire leur propre démonstration. Cette difficulté semble avoir disparu avec la dernière version de nos fiches.

c) La figure

Avant que nous proposions une figure dans l'énoncé, beaucoup d'élèves passaient beaucoup de temps à faire la figure, sans d'ailleurs forcément la réussir. Cette difficulté a pratiquement disparu. Mais comme les élèves n'ont pas à faire la figure, ils ne pensent jamais, pour chacun des énoncés, à coder sur la figure les données et, de ce fait, ont des difficultés à différencier les hypothèses des différents énoncés à la seule lecture du texte. C'est pourquoi nous proposons dans une aide trois figures qui peuvent être codées.

d) Comprendre ce que peut être une démonstration

L'erreur la plus fréquente, pour prouver qu'une démonstration ne convient pas à un énoncé, est de vérifier, pour une information tirée de l'énoncé, qu'elle n'apparaît pas dans la démonstration. Cette information peut être assez générale comme « *le point I est dans l'énoncé et on n'en parle pas dans la démonstration* » ou une donnée plus précise comme « *AH est la hauteur* » qu'on recherche telle quelle dans la démonstration. Cette erreur s'exprime encore sous la forme : « *il faut utiliser toutes les données de l'énoncé* ».

L'idée qu'une démonstration peut être bonne pour un énoncé et fausse pour un autre a du mal à faire son chemin.

Quand dans une démonstration les élèves rencontrent une affirmation non démontrée, il est fréquent que leur première réaction soit de chercher une démonstration. Ce n'est que dans un deuxième temps qu'ils se disent implicitement qu'il ne peut y avoir un long morceau de démonstration sous-entendu.

On rencontre aussi des fautes parfois grossières sur les résultats mathématiques sous-jacents ; par exemple un groupe de 2^{nde} dit : *« 4 côtés égaux cela fera un carré. Il faut quelque chose en plus pour un losange ».*

Au cours des discussions entre les élèves, on voit apparaître leurs fausses représentations de ce que peut être un texte de démonstration ; par exemple un groupe d'élèves dit à propos du mot « *considérons* » : « *si on mettait ça dans un texte on nous mettrait zéro* ».

e) Le rôle des sous-entendus

Dans plusieurs cas, la donnée de l'énoncé qui est utilisée dans la démonstration est *reformulée*. Par exemple dans la démonstration B du « Losange de Cesson », il est écrit « (EF) et (AH) étant parallèles », alors que les données de l'énoncé 3 s'expriment sous la forme : « (D) est la parallèle à (AH) passant par E. (D) et (D') se coupent en F ».

Souvent les élèves ne voient pas ces données cachées parce qu'ils recherchent dans l'énoncé une proposition identique à celle de la démonstration. Par exemple ils ne voient pas que « E et F sont sur la droite (D) » est une donnée de l'énoncé alors que celui-ci contient les phrases : « soit (D) la parallèle à (AH) passant par E »… « (D) et (D') se coupent en F ».

Mais, même quand ils reconnaissent cette donnée cachée, ils estiment parfois qu'il manque une explication dans la démonstration. Par exemple ils affirment : *« La démonstration D ne convient pas à l'énoncé 3 parce que dans la démonstration D on dit que I est sur (BC) et dans l'énoncé 3, (D) coupe (BC) en I ».*

Ces difficultés, liées aux sous-entendus, restent souvent implicites en $4^{\text{ème}}$, alors qu'elles provoquent des discussions en 2^{nde}.

4) L'utilisation de ces fiches

a) Niveau

Ces deux fiches n'utilisent que des connaissances de $5^{\text{ème}}$. « Le parallélogramme de Saint-Méen » convient parfaitement à la $4^{\text{ème}}$ assez tôt dans l'année, peut-être même en fin de

5ème (nous n'avons pas fait d'expérience de ce type). « Le losange de Cesson » nécessite d'avoir déjà une certaine pratique de la démonstration. Elle est donc plus abordable en milieu d'année de 4ème (de préférence avant les derniers conseils de classe) et éventuellement après « Le parallélogramme de Saint-Méen ».

Ces deux fiches, mais surtout la deuxième, peuvent être utilisées avec profit en 3ème ou en 2nde. La figure qui est sur la fiche des énoncés est indispensable dans tous les cas, car pour ces activités il est plus intéressant que les élèves consacrent plus de temps à une réflexion sur la démonstration qu'à la construction de figures. En revanche, en 2nde, il n'est sans doute pas nécessaire de donner la fiche avec des figures à coder.

b) Préparation

Il n'est pas nécessaire de faire une préparation spécifique à ces fiches. En revanche, il est utile que les élèves aient pris l'habitude, devant un énoncé, de coder sur la figure les données du problème, et qu'ils aient eu l'occasion de rencontrer des textes de démonstration de styles variés s'écartant de stéréotypes comme : « je sais que : *hypothèses* or : *propriété* donc : *conclusion* ». Pour « Le losange de Cesson », la démonstration avec des angles semblant décourager certains élèves, cette activité peut être l'occasion de proposer un ou deux exercices de révision sur les angles dans les semaines qui précèdent ou dans la semaine qui suit.

c) Mode d'emploi

Pour une meilleure efficacité, il est préférable d'organiser le travail par groupes de trois ou quatre. Chaque élève remplit une fiche réponse pour lui-même et le groupe remplit une fiche réponse pour la rendre à l'enseignant. C'est cette dernière fiche qui sert lors de l'exploitation. Chaque activité représente environ une heure de travail en 4ème.

d) Exploitation

Malgré les difficultés, un nombre important d'élèves expriment à un moment ou à un autre des idées pertinentes. Mais ces idées restent fugitives. Il est donc absolument nécessaire de consacrer une séance à consolider les connaissances entrevues. Au cours de cette séance on pourra proposer à la classe des réponses d'élèves judicieusement choisies. L'expérience montre que la classe saura rejeter les réponses fausses. La séance peut se conclure par quelques institutionnalisations s'appuyant sur les formulations des élèves.

D'une part, on explicite « qu'une démonstration ne convient pas à un énoncé :

- si elle contient des affirmations qui ne sont pas démontrées et qui ne sont pas des données de l'énoncé,
- si on y démontre des propositions qui sont des données de l'énoncé,
- si on utilise un théorème inadapté ».

D'autre part on peut discuter sur la question des sous-entendus, sur la grande diversité des mots de liaison, sur le sens précis de ces mots, sur la liberté dans l'ordre d'écriture d'une démonstration, etc.

III – Synthèse

Le but des activités « Le losange de Cesson » et « Le parallélogramme de Saint-Méen » est, comme nous l'avons déjà souligné, de faire mieux comprendre à nos élèves le rôle des données du problème dans la démonstration. De ce point de vue, les expériences réalisées sont convaincantes. En $4^{ème}$, avec les dernières versions qui comportent une figure et une fiche réponse, tous les groupes comprennent la consigne et la plupart trouvent les bonnes associations entre les énoncés et les démonstrations. On trouve environ 30 % d'erreurs sur les raisons qui permettent d'affirmer qu'une démonstration ne convient pas à un énoncé. Mais le débat en classe permet de surmonter ces erreurs. Lors de ce débat, les élèves ont pu constater que l'utilisation d'une proposition qui n'est pas une donnée du problème ne peut être admise dans une démonstration que si elle est justifiée, contrairement à l'utilisation d'une donnée du problème, et qu'il n'est pas toujours nécessaire d'utiliser toutes les données d'un problème pour qu'une démonstration soit cohérente. La discussion a permis de faire « un état des lieux » sur les expressions qu'on rencontre dans des manuels scolaires : on sait que, par hypothèse, d'après l'énoncé, etc. Elle a été l'occasion de faire sentir que rédiger une démonstration comporte certaines libertés et qu'il n'est pas obligatoire de s'exprimer à la virgule près comme le fait le livre ou le professeur. À la suite de ces activités, les élèves semblent mieux comprendre ce qu'on attend d'eux dans une démonstration, surtout en ce qui concerne le rôle des données du problème.

En 2^{nde}, pour « Le Losange de Cesson », les élèves font peu de fautes. Cette fiche est une très bonne manière de relancer l'activité de démonstration dans cette classe.