

Fiche 2

Le parallélogramme de Saint-Méen

Voici 3 énoncés de problèmes et 3 démonstrations qui correspondent à la même figure avec la même question.

Un enseignant a rédigé pour chacun de ces énoncés une ou deux démonstrations, mais il a oublié d'indiquer l'énoncé correspondant à chacune de ces démonstrations.

Travail demandé :

Après avoir déterminé pour chaque démonstration l'énoncé auquel elle correspond, explique pour chaque démonstration comment tu peux savoir qu'elle ne convient pas à chacun des autres énoncés. Ecris tes réponses sur la fiche.

EXEMPLE DE REPONSE :

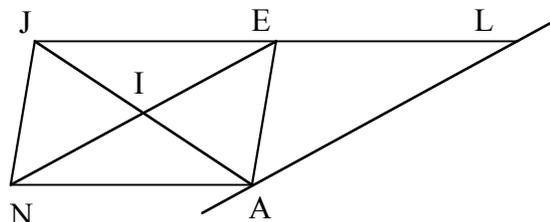
La démonstration C ne convient pas à l'énoncé 1 parce que $(AL) \parallel (NE)$ n'est pas une donnée de l'énoncé 1.

Énoncé 1

Soient les points A, N, J, E, L et I tels que :

- N et E sont symétriques par rapport à I
- J et A sont symétriques par rapport à I
- J et L sont symétriques par rapport à E

Montrer que ELAN est un parallélogramme.



Énoncé 2

Soit NJE un triangle quelconque. Soit I le milieu de [NE] et A le symétrique de J par rapport au point I. On mène par A la parallèle à la droite (NE) ; elle coupe la droite (JE) en L.

Montrer que ELAN est un parallélogramme

Énoncé 3

Soit JEAN un parallélogramme de centre I et soit L le symétrique de J par rapport à E. Montrer que ELAN est un parallélogramme.

Le parallélogramme de Saint-Méen (Fiche 2)

Démonstration A

JEAN est un parallélogramme, donc $(NA) \parallel (JE)$ et $NA = JE$. J et L sont symétriques par rapport à E, donc $JE = EL$ et J, E et L sont alignés. D'où $NA = EL$ et $(NA) \parallel (EL)$. Un quadrilatère ayant deux côtés opposés parallèles et de même longueur est un parallélogramme ; donc ELAN est un parallélogramme.

Démonstration B

En utilisant la symétrie de centre I, on a I milieu de $[NE]$ et I milieu de $[JA]$; les segments $[NE]$ et $[JA]$ ont donc même milieu. Or un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme. Donc JEAN est un parallélogramme et, par suite, $(NA) \parallel (JE)$ et $NA = JE$. Comme J et L sont symétriques par rapport à E, alors $JE = EL$ et les droites (JE) et (EL) sont confondues. On en déduit que $NA = EL$ et $(NA) \parallel (EL)$. ELAN est par conséquent un parallélogramme, car il a deux côtés opposés parallèles et de même longueur.

Démonstration C

Pour montrer que ELAN est un parallélogramme, il suffit de démontrer que ses côtés opposés sont parallèles deux à deux. On sait déjà que $(AL) \parallel (NE)$. Montrons que $(NA) \parallel (EL)$. Comme J est le symétrique de A par rapport à I, I est le milieu du segment $[JA]$. Or I est aussi le milieu de $[NE]$; donc le quadrilatère JEAN est un parallélogramme, puisque ses diagonales se coupent en leur milieu. On en déduit que $(NA) \parallel (JE)$. Comme les droites (JE) et (EL) sont confondues, on a $(NA) \parallel (EL)$, ce qui achève la démonstration.

L'analyse des copies

L'analyse des copies reste un exercice difficile. Par exemple en discutant de la copie ci-dessous on s'est aperçu qu'on peut avoir sur elle des avis très différents.

UNE COPIE DE 4^{EME} POUR « LE PARALLELOGRAMME DE SAINT-MEEN »

La démonstration C correspond à l'énoncé 1

La démonstration A ne convient pas à l'énoncé 1 parce qu'ils ne parlent pas du Point I dans la démonstration.

La démonstration B ne convient pas à l'énoncé 1 parce qu'ils disent que JEAN est un parallélogramme dans la démonstration mais pas dans l'énoncé.

La démonstration B convient à l'énoncé 2.

La démonstration A ne convient pas à l'énoncé 2 parce qu'ils disent que JEAN est un parallélogramme dans la démonstration mais pas dans l'énoncé.

Pas d'explication pour la démonstration C ne convient pas à l'énoncé 2.

La démonstration A convient à l'énoncé 3 parce qu'on ne sait pas encore que I est le milieu de $[JA]$ et de $[NE]$.

La démonstration C ne convient pas à l'énoncé 3 parce qu'ils disent qu'on sait déjà que (NE) // (AL), mais non ce n'est pas vrai.

Dans une interprétation pessimiste, on peut estimer que l'élève utilise de mauvaises idées pour comparer les informations contenues dans la démonstration et dans l'énoncé. En effet la deuxième réponse, « A ne convient pas à 1 parce qu'ils ne parlent pas du point I dans la démonstration », correspond à la stratégie erronée : « tout ce qui est dans l'énoncé doit être dans la démonstration ». La troisième réponse « ils disent que JEAN est un parallélogramme dans la démonstration B mais pas dans l'énoncé 1 », fait apparaître l'incapacité de distinguer dans la démonstration ce qui est donné de ce qui est déduit. Enfin, la seule association réussie, la démonstration A avec l'énoncé 3, est peut-être obtenue avec l'argument : « l'énoncé et la démonstration commencent pareil ».

On peut, au contraire, interpréter les erreurs de manière optimiste. La première réponse « C convient à 1 » s'expliquerait parce que l'élève opère par élimination ; il pense avoir trouvé que les démonstrations A et B ne conviennent pas à 1 et c'est donc la démonstration C. La deuxième réponse est finalement acceptable car le point I est ici très important dans l'énoncé puisqu'il permet de situer N par rapport à E et J par rapport à A. Pour la troisième, il peut s'agir d'une simple confusion entre les démonstrations A et B. Pour la quatrième réponse, « B convient à 2 », l'élève a pu procéder encore une fois par élimination ; elle constate que la démonstration A ne convient pas à 2 (cinquième réponse correcte) et la démonstration C est déjà prise par I. Le fait qu'il n'y ait rien pour expliquer que la démonstration C ne convient pas à 2 est encourageant puisque C convient à 2. Enfin les trois dernières réponses sont acceptables même si l'argument pour rejeter la démonstration B est un peu faible : bien sûr on sait que JEAN est un parallélogramme, mais il n'est pas écrit que I est milieu de [JA] et [NE]. La copie se terminant mieux qu'elle ne commence, n'y a-t-il pas une certaine progression de l'élève dans la compréhension de ce qu'est une démonstration ?