

UNE FRACTION DONT LE CARRE EST DEUX

MATHEMATIQUES

CLASSE : 3ème

TYPOLOGIE :

Analyse d'une argumentation.
Repérage des arguments.
Comparaison d'argumentations.
Production d'une argumentation.

OBJECTIFS :

L'argumentation en Mathématiques ne se résume pas en la rédaction de démonstrations. La résolution de problèmes s'accompagne d'échanges d'arguments qui prennent souvent une forme beaucoup plus lâche. L'enseignant au cours de développements heuristiques, n'hésite pas à argumenter de cette manière. En particulier le statut des exemples y est différent. Ils contribuent à convaincre au cours de la résolution d'un problème, mais souvent ils ne jouent aucun rôle pertinent dans la démonstration finale.

Le premier but de cette activité est de revaloriser ce type d'argumentation dont l'apprentissage est défavorisé par une absence de statut dans notre enseignement.

Un deuxième objectif est de susciter la comparaison de deux textes argumentatifs. Il faut être capable par delà les différences de styles de reconnaître des structures argumentatives semblables et des arguments identiques.

PRE-REQUIS :

- Cette activité ne nécessite nullement la connaissance de $\sqrt{2}$.
- Pour les fractions il faut savoir simplifier des fractions (attention même si $2/8 = 1/4$, il n'est pas clair que $2/8$ soit le carré de $1/2$) et comparer des fractions à 2.
- Il faut bien maîtriser les nombres pairs et impairs. C'est la plus grande difficulté. En particulier il faut savoir que le carré d'un nombre pair est divisible par 4, et que le carré d'un nombre impair est impair.

DESCRIPTION DE L'ACTIVITE

Durée : Une heure pour les trois premières questions et leur correction, 30 minutes pour la dernière question.

Forme : Travail de groupes pour les trois premières questions, travail individuel pour la dernière.

Le texte du dialogue a été inventé : les dialogues réels dans un groupe d'élèves sont trop longs et trop compliqués pour être proposés à l'analyse. Plusieurs textes ont été essayés. Les modifications apportées avaient pour but de rendre plus apparents des arguments qui avaient échappé à certains élèves.

La formulation des questions a fait aussi l'objet de plusieurs essais. En particulier dans la troisième question nous avons demandé de rédiger un article pour un journal de vulgarisation. Cela s'est avéré trop difficile. D'autre part, dans sa forme actuelle, cette activité présente un bon équilibre entre tâche de reconnaissance d'un texte déjà écrit et tâche d'écriture d'un texte.

Dans une première version, cette activité comportait en son début un travail sur $\sqrt{2}$ et un exercice sur le carré des fractions. Nous y avons renoncé car cela présentait trop de difficultés simultanées : existence de $\sqrt{2}$ et preuve de son irrationalité. Par contre, nous pensons que cette activité peut être suivie d'un travail sur $\sqrt{2}$: diagonale du carré, notion de valeurs approchées etc...

OBSERVATION DES ELEVES

1) La première question est en général bien comprise malgré l'ambiguïté du mot "argument".

- La plupart des arguments contenus dans le dialogue sont cités par les élèves, le plus souvent sous la forme présentée dans le texte. Par exemple pour l'argument sur les fractions irréductibles, environ 2/3 des élèves citent la phrase "ce n'est pas la peine d'essayer des fractions qui se simplifient" et 1/3 modifient le texte par exemple : "il faut que les fractions soient irréductibles".
- Peu d'élèves citent les exemples numériques comme arguments.
- L'argument "le carré d'un nombre pair est divisible par 4" qui n'était pas explicite dans la version expérimentée n'a pas souvent été repéré.

2) La deuxième question est beaucoup moins bien réussie : il ne semble pas que ce soit la consigne qui soit en cause, mais plutôt la difficulté de la tâche :

- Seulement un tiers des élèves pense que les arguments, "le numérateur doit être plus grand que le dénominateur", "le numérateur ne doit pas être plus grand que deux fois le dénominateur" sont inutiles.
- La moitié pense que celui sur les fractions irréductibles est inutile : c'est seulement pratique.
- Le tiers pense que la divisibilité par 4 du numérateur est inutile. Ce point de la démonstration semble de toute façon le moins bien compris des élèves.

- Cependant la plupart de ceux qui ont mis dans la première question des exemples comme arguments, les placent dans les arguments inutiles.

3) La troisième question est assez bien réussie. On voit cette fois apparaître dans beaucoup de copies l'argument "le carré d'un nombre pair est divisible par 4". Cependant 1/3 seulement des copies repère l'argument sur les fractions irréductibles.

4) La réussite à la dernière question dépend de la classe. Mais il semble qu'il soit souhaitable pour obtenir un résultat convenable de faire la correction des trois premières questions avant d'aborder la 4ème.

CONCLUSION

Cette activité est assez difficile aussi bien à cause de son contenu mathématique que par la présence du raisonnement par l'absurde. Cependant c'est une bonne façon d'aborder l'irrationalité de $\sqrt{2}$. On peut la rendre plus aisée en la préparant par une activité sur les nombres pairs et impairs.

Du point de vue des objectifs sur l'apprentissage de l'argumentation elle paraît bien jouer son rôle. Il serait souhaitable de concevoir d'autres activités de ce type avec des contenus plus familiers. A titre d'exemple nous proposons, après cette activité, un texte de géométrie dans le même esprit : "Des dessins dans un triangle".

UNE FRACTION DONT LE CARRE EST 2

Lire attentivement le texte suivant pour répondre aux quatre questions proposées.

Un professeur demande à ses élèves :

"Cherchez une fraction dont le carré soit 2."

Voici la conversation de deux élèves qui cherchent ensemble.

Jean : C'est impossible.

Michel : Il faut quand même essayer. Je vais faire des calculs.

Il écrit : $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$, $(\frac{3}{4})^2 = \frac{9}{16}$.

Ca ne fait même pas 1 !

Jean : Il faut que le numérateur soit plus grand que le dénominateur.

Michel : Oui $(\frac{4}{2})^2 = \frac{16}{4}$. Ca fait 4 . $(\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$.

Jean : C'est un peu trop grand : on a dépassé 2.

Michel : $(\frac{5}{4})^2 = \frac{25}{16}$; $(\frac{8}{6})^2 = \frac{64}{36} = \frac{16}{9}$. C'est trop petit.

$(\frac{9}{6})^2 = \frac{81}{36} = \frac{9}{4}$. C'est trop grand.

Jean : Dis ! Ce n'est pas la peine d'essayer des fractions qui se simplifient, $\frac{8}{6}$ c'est $\frac{4}{3}$ et, avec $\frac{4}{3}$, les calculs sont plus faciles.

Michel : D'accord $\frac{5}{4}$ c'était trop petit, $\frac{6}{4}$ je n'essaie pas ça se simplifie.

$(\frac{8}{5})^2 = \frac{64}{25}$, non , $(\frac{7}{5})^2 = \frac{49}{25}$, on y est presque !

Jean : Il faut que ton numérateur soit pair sinon en simplifiant tu n'obtiendras pas 2. De toute façon, c'est pas la peine de faire tous ces calculs ça ne marche jamais.

Michel : Laisse-moi faire. En éliminant petit à petit toutes les fractions qui ne marchent pas, je finirai bien par trouver la bonne. Il faut que le numérateur ne soit pas plus grand que deux fois le dénominateur.

$$\left(\frac{16}{11}\right)^2 = \frac{256}{121} . \text{ C'est presque ça, 2 ça ferait } \frac{242}{121} .$$

Jean : Mais ça ne marchera jamais ! Comment veux-tu que le carré du haut se simplifie avec le carré du bas pour qu'il ne reste que 2.

Michel : $\left(\frac{18}{13}\right)^2 = \frac{324}{169}$. C'est un tout petit peu trop petit.

Jean : Attends, je crois que j'ai compris ce qui se passe : ton numérateur est toujours divisible par 4 et donc ça ne peut pas se simplifier.

Michel : C'est vrai 324 est divisible par 4. Ah oui! c'est parce que 18 est divisible par 2. Je n'avais jamais remarqué que le carré d'un nombre pair est divisible par 4. Mais pourquoi ça ne pourrait pas se simplifier ?

Jean : Parce que le dénominateur est impair.

Michel : Tu as raison. On aura beau simplifier, il restera toujours 4 au numérateur et on n'obtiendra jamais 2.

Jean : (S'adressant au professeur). On a trouvé ! Il n'y a pas de fraction qui a un carré égal à 2.

Questions :

1) Relève les arguments échangés par Jean et Michel au cours de leur recherche.

2) Certains de ces arguments ne sont pas vraiment nécessaires pour te convaincre du résultat. Lesquels ?

3) Dans l'article ci-dessous, retrouve les arguments échangés par Jean et Michel.

UNE FRACTION INTROUVABLE

"Longtemps on a essayé de transcrire $\sqrt{2}$ par une fraction, c'est tout à fait impossible !"

A supposer que cette fraction existe, on l'utilise sous sa forme simplifiée. Son numérateur devrait être pair ; n'oublions pas en effet que le carré de cette fraction doit être 2.

Mais alors le dénominateur va être impair sinon on pourrait encore la réduire.

Considérons maintenant le carré de cette fraction. On sait que le carré d'un nombre pair est forcément divisible par 4 et celui d'un nombre impair est forcément impair.

Ici apparaît que l'on devrait obtenir 2 en faisant le quotient du numérateur qui est divisible par 4 par le dénominateur qui est impair. C'est absurde ! Cette fraction ne peut exister.

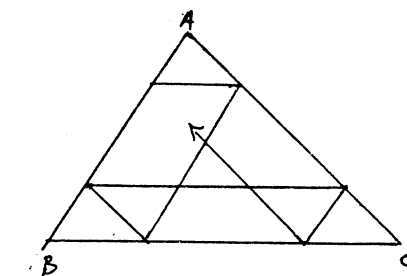
4) Ecris pour le cours de Mathématiques la démonstration du théorème "2 n'est pas le carré d'une fraction".

Attention, parmi tous les arguments relevés dans le 1), n'utilise que ceux qui sont indispensables.

DES DESSINS DANS UN TRIANGLE

Le professeur trace la figure ci-contre :

Il prend un point de (AB), puis trace la parallèle à (BC) jusqu'à ce qu'elle rencontre (AC) ; puis la parallèle à (AB) jusqu'à ce qu'elle rencontre (BC) puis la parallèle à (AC) jusqu'à ce qu'elle rencontre (AB) et ainsi de suite.



Il pose la question :

"Au bout de 6 tracés on a l'air de revenir au même point. Est-ce toujours vrai ?"

Deux élèves discutent à ce propos :

Jean : Ca a bien l'air de retomber au même endroit.

Michel : Moi je trouve que ça tombe au même endroit au bout de trois coups.

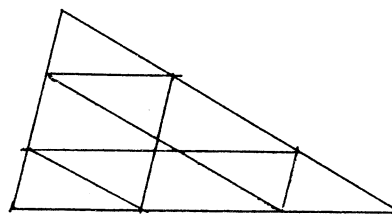
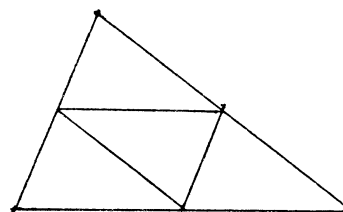


Figure de Jean

Jean : (Regardant la figure de Michel).
 C'est parce que t'as pris un cas particulier : je suis sûr que tes points sont au milieu des côtés.

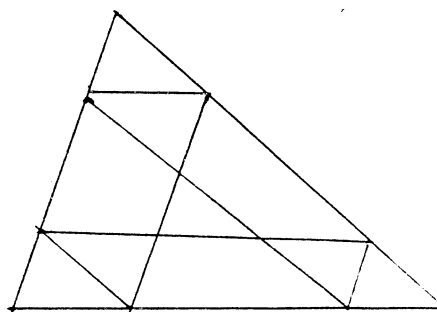
Michel : Tu as raison (il fait une deuxième figure).
 Ca ne tombe pas tout à fait juste, mais c'est peut-être que ma figure n'est pas bonne.



Première figure de Michel

Jean : Il y a du Thalès dans l'air.

Michel : J'ai l'impression que les trois petits triangles qui sont dans les coins sont égaux. Ça ferait que les segments des deux bouts de chaque côté sont égaux.



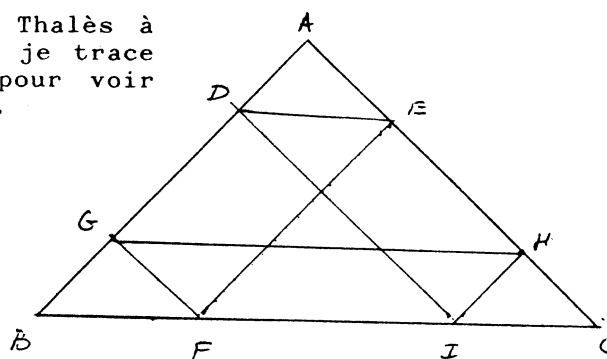
Deuxième figure de Michel

Jean : (Ajoutant des lettres sur sa figure).
Je vais écrire Thalès à chaque fois que je trace une parallèle pour voir ce que ça donne.

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} ,$$

$$\frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC} ,$$

$$\frac{BF}{BC} = \frac{BG}{BA} .$$



Michel : Mais regarde donc c'est beaucoup plus facile avec des parallélogrammes.

Jean : Explique.

Michel : Avec les parallélogrammes ADIH et GBIH on voit tout de suite que $AD = GB$. C'est pareil pour AE et HC .

Jean : Mais je trouve la même chose. Tous les rapports que j'ai écrits sont égaux et ça fait :

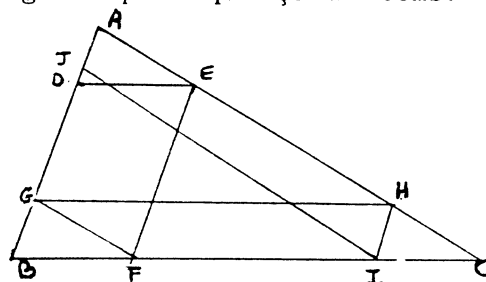
$$\frac{AD}{AB} = \frac{BG}{BA} .$$

Michel : (Revenant à sa figure).

Je ne comprends plus ce qu'il faut faire ! T'as fait ta figure comme si c'était vrai.

Jean : Ah oui ! On n'a qu'à regarder ta figure (il trace une nouvelle figure en s'arrangeant pour que ça ne tombe pas juste).

Michel : Les parallélogrammes sont toujours là : on a bien $AJ = GB$. Essayons sur les autres côtés. Ça marche pareil pour AE et HC . Mais ça ne marche pas pour BF et IC .



Jean : Avec ma méthode ça marche très bien je trouve encore $AD = GB$.

Michel : Mais ça donne $AJ = AD$. On a gagné, ma figure était fausse.