DES DEMONSTRATIONS EN ALGEBRE

MATHEMATIQUES	CLASSE : 2nde

TYPOLOGIE :

ANALYSE d'une ARGUMENTATION.

PRODUCTION d'un texte ARGUMENTATIF à partir d'arguments donnés.

OBJECTIFS :

1) Lorsqu'on parle de démonstration, d'argumentation, aux élèves, ils pensent le plus souvent à la géométrie. Il s'agit de les convaincre que, même si l'argumentation n'est pas explicitée en algèbre, chaque ligne de calcul est motivée par un argument précis et que la conclusion ne peut-être valide que si l'on a raisonné par équivalence.

2) Contenu de l'activité : le maniement des inéquations, fréquent dans les programmes d'analyse de toutes les classes de second cycle, est une des plus grosses difficultés rencontrées par les élèves :

* Les méthodes de résolution des inéquations se ramenant au 1er degré (les tableaux de signes sont revus ultérieurement).
* Les encadrements de nombres réels.
* Les intervalles de R.

3) Un objectif de l'activité est aussi d'utiliser le contre-exemple comme argument et de montrer que, par contre, l'utilisation d'un exemple peut ne pas être un argument suffisant (voir, dans "la copie d'Arthur", la fin de l'énoncé 1)

PRE-REQUIS :

- Connaissance des théorèmes sur les inégalités, revus précédemment dans le cours et notés T1 , T2...

- Connaissance des règles de signe des produits et des quotients.

DESCRIPTION DE L'ACTIVITE

Durée : Deux séances de travaux dirigés de 1H30 chacune.

Forme : - Travail individuel écrit pour la première partie de l'activité.
- Travail de groupes pour la "correction de la copie" d'Arthur.

L'activité, après la présentation d'un exemple pour que l'élève comprenne ce qu'on attend de lui, comporte deux parties :

Première partie :

Des résolutions d'inéquations sont présentées dans leur version dépouillée (telle qu'on l'écrit souvent au tableau par exemple). Les élèves doivent individuellement indiquer les arguments qui justifient les différentes étapes du calcul.

Il est très IMPORTANT, de faire écrire les théorèmes même s'ils y répugnent (repérage de l'opération exacte employée afin d'éviter la "chasse aveugle" des dénominateurs !).

Deuxième partie :

Une "copie imaginaire" d'élève (d'après un précédent document I.R.E.M.) a rassemblé les erreurs les plus fréquentes commises par les élèves. On demande aux élèves de repérer ces erreurs et de les rectifier en suivant les mêmes étapes d'argumentation que dans la première partie.

Il faut noter que cet exercice est beaucoup mieux réussi après la première partie que dans une première version où il était proposé sans exercice préparatoire.

OBSERVATION DES ELEVES

Dans la première partie, on peut remarquer la répugnance des élèves à écrire des phrases, à citer des théorèmes complets, à vérifier que toutes les conditions requises d'application d'un théorème sont bien réunies. Cela confirme les difficultés d'acquisition de cette partie du programme qui exige beaucoup de méthode et de rigueur.

La deuxième partie dans sa forme plait beaucoup aux élèves mais c'est aussi celle qui présente le plus de difficultés : ils sont prêts à commettre les mêmes erreurs qu'Arthur et ne sont pas du tout choqués de le voir :

- retrancher membre à membre deux inégalités.
- multiplier ou diviser par des expressions contenant l'inconnue.
- oublier de vérifier les conditions d'application d'un théorème (produit d'inégalités membre à membre par exemple).

On peut noter également que la résolution d'inéquations simultanées et le passage aux intervalles à partir des inégalités restent souvent des points délicats.

BILAN

La nécessité d'argumenter, de réfléchir à chaque étape de calcul n'est évidemment pas acquise au bout de cette seule activité.

Elle a cependant le mérite de mettre en lumière la différence entre une suite de calculs telle que l'on peut l'écrire (au brouillon ou au tableau) et une activité rédigée telle qu'on peut l'exiger sur une copie par exemple.

Elle peut donc servir de référence pour l'apprentissage de la rédaction d'une argumentation, et c'est bien sûr aussi un pas de plus dans l'apprentissage de la rigueur.

* Activité d'argumentation
*   Mathématiques
* * * * * * * * * * * * * *

DES DEMONSTRATIONS EN ALGEBRE

I - Le but de cet exercice est de vous faire écrire, pour des résolutions d'inéquations, des démonstrations aussi détaillées qu'en géométrie.

Voici les théorèmes dont vous disposez sur les inéquations.

T1 : En ajoutant (ou retranchant) un même nombre aux deux membres d'une inéquation, on obtient une inéquation équivalente.

T2 : En multipliant (ou divisant) par un même réel strictement négatif les deux membres d'une inéquation et en changeant le sens de l'inégalité, on obtient une inéquation équivalente.

T3 : En multipliant (ou divisant) par un même réel strictement positif les deux membres d'une inéquation, sans en changer le sens, on obtient une inéquation de même sens.

T4 : Etant donné deux inégalités de même sens ne comportant que des nombres positifs, on en déduit une inégalité de même sens en les multipliant membre à membre.

T5 : En ajoutant membre à membre deux inégalités de même sens, on obtient une inégalité de même sens.

T6 : Deux réels positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés.

T7 : Deux réels positifs sont rangés dans l'ordre contraire à celui de leurs inverses.

T8 : Le produit de deux nombres est positif si et seulement si ces nombres sont de même signe. Il est négatif si et seulement si les deux nombres sont de signe contraire.

Voici un exemple :

A gauche, il y a la résolution d'un exercice sans commentaire, et à droite se trouve un texte de démonstration détaillé pour le même exercice.

Résoudre dans R l'inéquation : $-3x - 4 < -(5x + 7)$

$-3x - 4 < -(5x + 7)$	On veut déterminer l'ensemble des réels x qui vérifient l'inégalité : $-3x - 4 < -(5x + 7)$
$3x + 4 > 5x + 7$	En multipliant les deux membres de l'inégalité par (-1) et en changeant son sens, on obtient une inéquation équivalente. (T2). $3x + 4 > 5x + 7$
	On obtient encore une inéquation équivalente en retranchant 5x + 4 aux deux membres (T1) puis en simplifiant :
$-2x > 3$	$3x + 4 - 5x - 4 > 5x + 7 - 5x - 4$; $-2x > 3$
$x < -\frac{3}{2}$	Enfin en divisant les deux membres par (-2) et en changeant le sens de l'inégalité, on obtient encore une inéquation équivalente. $x < -\frac{3}{2}$
$S =]-\infty , -\frac{3}{2}[$	On peut alors conclure : l'ensemble S des solutions de l'inéquation est l'intervalle $]-\infty , -\frac{3}{2}[$

Consigne :

En utilisant l'exemple précédent et les théorèmes dont vous disposez sur les inéquations, écrire de la même manière des démonstrations détaillées pour les résolutions d'inéquations faites ci-dessous (on a mis un signe * aux endroits qui demandent plus particulièrement une justification).

Résoudre dans R l'inéquation :

1) $\frac{5x - 1}{6} + 5 > \frac{3x - 1}{3} + \frac{2x - 5}{6}$

* $5x - 1 + 30 > 2(3x - 1) + 2x - 5$

$5x + 29 > 8x - 7$

* $5x - 8x > -7 - 29$

* $x < \frac{-36}{-3}$

$x < 12$

$S =]-\infty , 12[$

2) Résoudre dans R l'inéquation (double) d'inconnue a

$$-4 \leqslant 10a - 3 < 5$$

$$* \quad -4 + 3 \leqslant 10a < 5 + 3$$

$$* \quad -\frac{1}{10} \leqslant a < \frac{4}{5}$$

$$S = [-\frac{1}{10}, \frac{4}{5}[$$

3) Résoudre dans R l'inéquation d'inconnue x :

$$(x + 2)^2 < (3x + 1)^2$$

$$* \quad (x + 2)^2 - (3x + 1)^2 < 0$$

$$(x + 2 + 3x + 1)(x + 2 - 3x - 1) < 0$$

$$(4x + 3)(-2x + 1) < 0$$

* <u>1er cas</u> : $\begin{cases} 4x + 3 > 0 \\ -2x + 1 < 0 \end{cases}$ <u>2ème cas</u> : $\begin{cases} 4x + 3 < 0 \\ -2x + 1 > 0 \end{cases}$

* $\begin{cases} x > -\frac{3}{4} \\ x > \frac{1}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x < -\frac{3}{4} \\ x < \frac{1}{2} \end{cases}$

<u>1er cas</u> : $x \in]\frac{1}{2}, +\infty[$ <u>2ème cas</u> : $x \in]-\infty -\frac{3}{4}[$

Donc : $S =]-\infty, -\frac{3}{4}[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[$

4) Résoudre dans R l'inéquation d'inconnue t :

$$\frac{t - 1}{t - 2} \geqslant 4$$

Cette inéquation n'est définie que pour les valeurs de t différentes de 2.

$$* \quad \frac{t - 1}{t - 2} - 4 \geqslant 0$$

$$\frac{t - 1 - 4(t - 2)}{t - 2} \geqslant 0$$

$$\frac{-3t + 7}{t - 2} \geqslant 0$$

1er cas : $\begin{cases} -3t + 7 \geqslant 0 \\ t - 2 > 0 \end{cases}$ 2ème cas : $\begin{cases} -3t + 7 \leqslant 0 \\ t - 2 < 0 \end{cases}$

$\begin{cases} t \leqslant \frac{7}{3} \\ t > 2 \end{cases}$ $\begin{cases} t \geqslant \frac{7}{3} \\ t < 2 \end{cases}$

Donc : $2 < t \leqslant \frac{7}{3}$ ce qui est impossible.

Donc : $S = \left]2 , \frac{7}{3}\right]$

II - Voici maintenant la copie de l'élève Arthur : tu vas <u>jouer le rôle du professeur</u> et corriger ses erreurs éventuelles.

Pour qu'Arthur comprenne bien et rédige mieux la prochaine fois, il faut lui indiquer à chaque signe * le théorème exact qu'il aurait dû écrire (même s'il n'y a pas d'erreur).

<u>Enoncé 1</u> : On sait que deux nombres réels a et b sont tels que : $1 \leqslant a \leqslant 1,5$ et $2 \leqslant b \leqslant 3$.

Il s'agit d'encadrer par deux réels chacun des nombres $a + b$, $a - b$, $a \times b$ et $\frac{a}{b}$

<u>Réponse d'Arthur</u> :

1) Je sais que : $1 \leqslant a \leqslant 1,5$
$2 \leqslant b \leqslant 3$

Donc : * $3 \leqslant a + b \leqslant 4,5$

2) Par hypothèse : $2 \leqslant b \leqslant 3$
Par conséquent : * $-2 \leqslant -b \leqslant -3$

De plus, je sais que $1 \leqslant a \leqslant 1,5$ et donc, en additionnant membre à membre deux inégalités de même sens :

$$-1 \leqslant a - b \leqslant -1,5$$

3) J'applique le théorème *
Donc j'obtiens : $2 \leqslant a \times b \leqslant 4,5$

4) Puisque $2 \leqslant b \leqslant 3$, sachant que : *

Je peux écrire : $\frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{3}$

Par hypothèse, on a aussi : $1 \leqslant a \leqslant 1,5$

Donc, en appliquant le même théorème qu'à la question 3) :

$\frac{1}{2} \leqslant a \times \frac{1}{b} \leqslant \frac{1,5}{3}$

$0,5 \leqslant \frac{a}{b} \leqslant 0,5$ Donc : $\frac{a}{b} = 0,5$

Après la correction, Arthur dit : je ne comprends pas, j'avais pourtant vérifié !

J'avais choisi des nombres : $a = 1,2$ et $b = 2,4$

Alors : $a + b = 1,2 + 2,4 = 3,6$. Ca marche pour l'encadrement !

$a - b = 1,2 - 2,4 = -1,2$. C'est bien entre -1 et $-1,5$!

et aussi : $a \times b = 1,2 \times 2,4 = 2,88$
et j'ai bien trouvé : $2 \leqslant 2,88 \leqslant 4,5$

$\frac{a}{b} = \frac{1,2}{2,4} = 0,5$ Ca aussi, c'est bon !

Arthur s'est encore trompé, prouve-le lui !

Enoncé 2 : Résoudre dans R les inéquations suivantes.

Solutions d'Arthur :

1) $\frac{7 - x}{-5} \geqslant 3$

$\frac{x - 7}{5} \geqslant 3$

* $x - 7 \geqslant 15$

$x \geqslant 22$

$x \in]22 , +\infty[$

$S =]22 , +\infty[$

2) $\frac{4(7x - 1)}{3} < 5x - 2$

* $4(7x - 1) < 3(5x - 2)$

$28x - 4 < 15x - 6$

* $13x < \frac{3}{2}$

$x < \frac{3}{26}$

$S =]-\infty , \frac{3}{26}[$

3) $\frac{10x - 8}{\sqrt{2}-7} \geqslant 1$

* $10x - 8 \geqslant \sqrt{2} - 7$

$10x \geqslant \sqrt{2} + 1$

* $x \geqslant \frac{\sqrt{2} + 1}{10}$

$S = \left[\frac{1 + \sqrt{2}}{10} , +\infty\right[$

4) $\frac{x - 2}{2x + 5} < 1$

Cette inéquation est définie pour $x \neq -\frac{5}{2}$

* $x - 2 < 2x + 5$

$-7 < x$

$S =]-7 , -\frac{5}{2}[\cup]-\frac{5}{2} , +\infty[$

5) $(x - 7)^2 > 25$

* $x - 7 > 5$

$x > 12$

$S =]12 , +\infty[$

Arthur a encore fait beaucoup d'erreurs dans cette deuxième partie : il faut lui donner un CORRIGE avec des résolutions exactes d'inéquations !