LA DEMONSTRATION EST UN TEXTE

1. LA DEMONSTRATION : QUEL TYPE DE TEXTE

L'idée que « la démonstration est un texte » a pris peu à peu de l'importance dans la conception de l'apprentissage. D'une part un effort a été fait pour décrire les structures de ces textes particuliers ; certains auteurs montrent à cette occasion la diversité des textes qui sont ainsi dénommés. D'autre part des séquences ou des activités ont été conçues autour de l'idée « d'apprendre à écrire »[1].

1.1. LA DEMONSTRATION N'EST PAS UNE ARGUMENTATION.

Ceci est une idée très ancienne, un résultat classique de l'analyse du discours, défendu par Duval, Balacheff et repris par Jean Houdebine[2]. « La plupart des enseignants de mathématiques en collège voient d'abord dans la démonstration une argumentation » ; ceci est dû à la similitude des mots de liaison utilisés et à l'organisation apparente du texte.
« Cependant, une analyse plus attentive fait apparaître des différences essentielles entre ces deux types de textes. Par exemple, si dans une argumentation, l'ajout d'un argument la rend en général plus convaincante, donner deux raisons là où une seule suffit affaiblit une démonstration au point qu'elle sera considérée comme incorrecte par certains. »
« L'argumentation a pour objet de changer l'opinion de celui auquel elle s'adresse. » « Dans la démonstration au contraire il s'agit de s'assurer qu'un résultat est bien la conséquence de théorèmes déjà connus. » Dans une démonstration c'est le « statut opératoire » des propositions qui est l'élément essentiel de l'organisation, alors que dans l'argumentation c'est le contenu des propositions et les relations sémantiques qu'elles entretiennent ainsi que leurs oppositions[3].
L'enseignement de la démonstration doit se donner les moyens de faire comprendre ces différences aux élèves ; cela ne peut se traduire sous la forme d'une explicitation théorique, car elle est évidemment inaccessible à ce niveau. C'est donc par des activités adaptées qu'il faut mettre en évidence les caractéristiques des démonstrations vis-à-vis des argumentations que les élèves ont l'occasion de rencontrer dans les autres disciplines.

---

[1] Jean Houdebine, *La démonstration, écrire des mathématiques au collège et au lycée*, Hachette Éducation, 1998.

ou Marie-Agnès Egret et Raymond Duval, *Comment une classe a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration*, Annales de didactique et de sciences cognitives n°2, IREM de Strasbourg, 1989.

[2] Jean Houdebine, *L'apprentissage de la démonstration*, Cahiers Pédagogiques n° 316, 1993.

[3] Raymond Duval, *Argumenter, Démontrer, Expliquer : continuité ou rupture*, Petit X n°31, IREM de Grenoble, 1993.

1.2. LES DEMONSTRATIONS, ARTICULATIONS DE PAS DEDUCTIFS

Pour **Raymond Duval** les élèves rencontrent en général pour la première fois les exigences de la démonstration dans les problèmes de géométrie au collège. La pratique du raisonnement déductif et la compréhension de son fonctionnement sont des conditions préalables à l'activité de démonstration.

Dans les démonstrations les plus simples, il existe ***deux types de passage*** :

- le ***pas de raisonnement*** sous le schéma classique : prémisses (hypothèse, proposition d'entrée) ; règle d'inférence (explicite ou implicite) ; conclusion (nouvelle proposition).
- ***l'enchaînement*** qui établit le lien entre deux pas de raisonnement.

Dans les phrases constituant un pas déductif, il existe ***deux niveaux de langage*** :

- les énoncés du ***langage mathématique*** (ex : « G est le milieu de [AM] »)
- les locutions : « comme », « or »,... qui appartiennent au ***métalangage*** et qui servent à montrer les différents statuts des énoncés.

Dans la rédaction d'un texte de démonstration, les pas de déduction s'enchaînent avec un recyclage en proposition d'entrée de la proposition obtenue comme conclusion dans un pas précédent. Ce recyclage est repérable par des expressions comme « *d'après la démonstration précédente*.. » ou bien par une « cascade » de « *donc* » sans énoncé-tiers explicite ou encore par une mise en évidence typographique.

Mais il existe dans les démonstrations d'autres structures que les pas. La mieux connue est sans doute le raisonnement par l'absurde : pour démontrer la proposition « P », on ajoute aux données la négation de P et on démontre qu'il y a une contradiction. Cet ajout d'une donnée ne s'analyse pas en terme de pas car il ne consiste pas à tirer des conséquences de quelques prémisses. On trouve un phénomène analogue dans les disjonctions des cas[4].

Deux autres démarches, liées à la présence de quantificateurs dans les propositions servant de données ou de conclusions, sont très importantes ; d'une part la « généralisation » qui consiste, pour montrer que tout objet possède la propriété P, à démontrer P pour un objet quelconque (quantificateur : *quel que soit*), d'autre part la démarche qui consiste à donner un nom à un objet dont on connaît l'existence (quantificateur : *il existe*).

1.3. LES DEMONSTRATIONS DES ENSEIGNANTS

Les conceptions des enseignants de mathématiques sur la démonstration sont très diverses : les uns font un texte de français sans aucun symbole, les autres un schéma de texte avec flèches ou accolades ; certains écrivent tous les détails, d'autres ne mettent que l'essentiel à leurs yeux ; les propositions ne sont pas toujours citées dans l'ordre ; des commentaires heuristiques sont parfois ajoutés. Ce qui semble certain c'est que les élèves préfèrent les démonstrations qui ressemblent à celles que leur enseignant leur propose.

De ce fait, quelques règles s'imposent pour le professeur, règles qui ne doivent en aucun cas devenir des exigences pour les élèves. Nous vous en proposons quelques-unes :

- « tous les pas de démonstration doivent être repérables aisément,
- chaque pas doit avoir une conclusion explicite annoncée par une expression ou une disposition adaptée,
- les mots ou les dispositions qui indiquent le statut de chaque proposition ne doivent présenter aucune ambiguïté,

---

[4] Pour une description plus détaillée voir Jean Houdebine, *La démonstration, écrire des mathématiques au collège et au lycée*, Hachette Éducation, 1998.

– les théorèmes utilisés, qu'ils soient explicitement énoncés ou sous-entendus, doivent faire partie de la liste des théorèmes *reconnus* à ce stade de la scolarité.

Mais il n'est pas question d'imposer une présentation figée, car il faut armer les élèves devant la diversité des démonstrations qu'ils rencontreront. Il faut donc aussi se donner comme règle de proposer des rédactions variées. Cela sera un atout inestimable pour leur permettre de reconnaître, par-delà les traits de surface, les règles fondamentales de ce type de texte. Cela facilitera aussi leur écriture, car ils se sentiront plus libres d'utiliser leur style personnel ».
« La maîtrise de la démonstration passe par l'acquisition d'une certaine liberté d'écriture. »[5]

Une étude de Noirfalise sur le maniement d'énoncés dans une démonstration[6] est une illustration de ce qui précède.
Un pas déductif peut être présenté de différentes façons:

– il peut y avoir des **variantes de positions** : « j'utilise le théorème des milieux dans le triangle ABM avec C' milieu de [AB] et G milieu de [AM], j'en déduis que (C'G) est parallèle à (BM) ».
– il y a souvent des variantes concernant **l'évocation de l'énoncé-tiers** : celui-ci peut être en partie instancié (dans les données) ou en totalité ; il peut être cité de manière générale ou cité par son nom. « Il convient, semble-t-il, lorsqu'on fait apparaître un objet mathématique ou certaines de ces propriétés, d'être attentif à la formulation, en terme d'énoncés, des définitions et propriétés, en pensant aux usages à venir, dans des démonstrations, de ces mêmes énoncés, prendre soin en quelque sorte du dispositif sur lequel va s'exercer les gestes de la démonstration. Si l'on se permet cette remarque, c'est que parfois, à la lecture de certains manuels actuels, ceci nous semble parfois un peu perdu de vue. »

Un **pas déductif** peut parfois se présenter **sans énoncé-tiers**, par exemple : *« Comme M est le symétrique de A par rapport à G, on peut dire que G est le milieu de [AM] »* car il y a une difficulté technique pour l'énoncer clairement de manière instanciée ou non, (*un point est le symétrique d'un autre par rapport à un troisième lorsque le troisième est le milieu du segment formé par les deux premiers*). Il n'est donc pas nécessaire d'expliciter chaque énoncé-tiers si cela rend la démonstration longue et fastidieuse. Mais en voulant être plus concis et en présentant le pas déductif avec une structure binaire, il y a risque de confusion entre l'implication et la structure d'un pas déductif.

1.4. LES DEMONSTRATIONS DES MANUELS

Isabelle Beck[7] a constaté, en étudiant cinq textes de démonstrations de manuels de Quatrième, que la part des propositions logico-discursives (prémisses, énoncé-tiers ou conclusion) qui restent totalement implicites est importante. A peine un pas de raisonnement sur trois est complet (bien que nous soyons en Quatrième). « C'est la connaissance du contexte théorique (les normes de la démonstration et les connaissances sur les objets géométriques et leurs relations) qui permet de comprendre l'implicite du texte de démonstration en même temps qu'elle contraint cette compréhension ».
Colette Laborde s'est intéressée à la lecture, par des élèves de Troisième, de textes extraits de manuels de mathématiques et a cherché à « dégager l'incidence des caractéristiques

[5] Jean Houdebine, op. cit.

[6] Robert Noirfalise, *Étude sur le maniement des énoncés dans une démonstration*, Petit X n° 46, 1998.

[7] Isabelle Beck, *Une approche linguistique des textes de raisonnement*, Produire et lire des textes de démonstration, Éditions Ellipses, Paris, 2001.

linguistiques de ces textes sur les interprétations des élèves »[8]. Les textes étudiés portent sur les opérations sur les racines carrées, avec en particulier l'étude des démonstrations. Ils permettent de constater une très grande diversité.

- Certains annoncent clairement l'objectif de la démonstration, d'autres l'évoquent partiellement ou pas du tout.
- L'enchaînement est parfois repérable à l'aide de connecteurs ou de raisons explicitées par le texte : « il suffit de comparer leurs carrés » ou encore : « puisque $\sqrt{a}$ x $\sqrt{b}$ et $\sqrt{ab}$ sont deux nombres réels positifs ou nuls dont les carrés sont égaux, nous pouvons conclure... » D'autres fois celui-ci est à peine marqué ou de manière ambiguë : un seul connecteur « d'où » renvoyant en fait à deux énoncés dont l'un n'est pas explicité.

Les connecteurs explicitent parfois les liens d'implication sans donner la raison de cette implication ou sans renvoyer à une explication citée bien avant.
« L'absence de connecteurs est aussi bien due à une absence de lien qu'à un lien jugé trop évident pour être mentionné. »
Il arrive parfois qu'il manque dans certains manuels l'énoncé nécessaire à la démonstration ou que l'accent soit mis sur une étape non essentielle.
On peut se demander alors quelles conséquences cela peut avoir sur les élèves qui utilisent ces manuels ? Le professeur doit-il consacrer un peu de temps à la lecture, voire à la critique de certains contenus ?

2. APPRENDRE A ECRIRE UN TEXTE

En présence d'un texte mathématique, l'élève va le *lire,* puis il aura l'occasion d'*écrire* ses propres textes qu'il va *relire* pour poursuivre ses *écrits* et *ainsi de suite …*
Et c'est ainsi qu'il va rencontrer, dans ses lectures de démonstrations du professeur ou du manuel, des mots nouveaux qui peuvent désigner des concepts, des mots pièges car ayant plusieurs sens, des mots d'articulation chevilles de ses écrits. Il devra aussi passer du langage oral, langage essentiel de la communication des premières années, au langage écrit nécessaire à la rédaction de la démonstration.

2.1. LES MOTS « PREMIERS » ET LES PROPRIETES « PREMIERES »

Un élève de Sixième rencontrera 167 mots techniques nouveaux en mathématiques, un élève de Cinquième 203, et un de Quatrième 571 (étude faite à partir d'un manuel scolaire)[9] !
Notons qu'un élève de Sixième rencontrera environ 6000 mots nouveaux toutes disciplines confondues. Mais comme le rappelle Arsac[10], il faut, pour définir des mots, utiliser d'autres mots ; lesquels ? Il existe « *des mots premiers ou termes primitifs* ». Il pense que les hommes possèdent un ensemble de mots dont l'usage est commun à tous. Pour Hilbert des mots comme « point », « droite », « plan » sont premiers . Arsac cite l'exemple : « on dit qu'un quadrilatère est convexe si ses diagonales se coupent à l'intérieur » ; l'expression « quadrilatère convexe » est définie avec les mots « diagonales » « se coupent » « à l'intérieur »… est-il plus facile d'expliquer « convexe » ou « à l'intérieur » ? Bien évidemment on ne peut pas tout définir, l'enseignant doit faire des choix, ses choix. Il faut

---

[8] Colette Laborde, *Lecture de textes mathématiques par des élèves (14-15 ans) : une expérimentation*, Petit X n°28, IREM de Grenoble, 1992.

[9] Alain Lieury, *Mémoire et réussite scolaire*, Dunod, Paris, 1991.

[10] Gilbert Arsac, *Les limites d'un enseignement déductif de la géométrie*, Petit X n°47, IREM de Grenoble, 1998.

cependant que les mots primitifs soient intégrés pour permettre l'approche de la démonstration. Il est par conséquent nécessaire de faire travailler les jeunes élèves sur ces mots primitifs. On peut par exemple faire des activités autour de la nomination d'objets géométriques ; le plus souvent les figures proposées aux élèves contiennent assez d'éléments (noms de points, noms de droites, noms de cercles...) pour qu'il soit facile de désigner les objets géométriques dont on veut exprimer les propriétés ; on peut donner une figure muette à l'élève et lui demander de choisir lui-même ces éléments.
L'idée de « propriétés premières » a été décrite par Rouche[11]. Il parle de « géométrie naturelle » ; certaines propriétés fonctionnent grâce à leurs caractères évidents : la propriété des angles opposés par le sommet, la droite qui passe par 2 points distincts etc… c'est la perception que l'enfant aura du monde qui l'entoure qui lui permettra d'accéder à cette évidence ; d'où la nécessité du découpage, pliage, décalquage, dessin sur feuille quadrillée etc… et cela le plus tôt possible et le plus souvent possible et en tout cas dès la Sixième (et même avant), mais aussi en Cinquième.
« Les structures géométriques visuelles sont l'outil le plus élémentaire, elles fournissent le premier type d'argument de la pensée déductive : j'ai reconnu telle figure (ou plus exactement tel type de figure) à tel signe déterminant, donc je sais que j'ai telle ou telle autre propriété de la figure. » dit Rouche.

2.2. LES MOTS PIEGES

Le vocabulaire est source de difficulté ; certains mots connus dans le langage usuel et dans d'autres disciplines prennent un sens plus précis en se conceptualisant : *milieu, centre* ... Il sera donc utile de consacrer du temps dès la Sixième à l'utilisation de ces nouveaux mots. Un peu plus tard, en Cinquième, des mots prennent des sens différents suivant le contexte où ils se trouvent : l'exemple de la formule du volume du prisme à base triangulaire est significative : le mot « *hauteur* » désignant à la fois la hauteur d'un objet du plan : le triangle, et la hauteur d'un objet de l'espace : le prisme.

2.3. LANGAGE ORAL, LANGAGE ECRIT

A la suite de Vygotski, Raymond Duval[12] pense que les différences de fonctionnement entre langage oral et langage écrit ont un rôle important dans l'apprentissage. Il analyse quelques unes de ces différences : l'expression orale est linéaire, en ce sens qu'elle ne permet pas de retour en arrière réel, l'interruption peut déstabiliser le « locuteur », le fait d'avoir un interlocuteur donne un champ commun de références, il donne une motivation …. alors que l'expression écrite s'organise, elle ne se fait pas en temps réel, elle permet des retours en arrière « écrire, c'est réécrire » …
Ces quelques repères nous montrent l'importance de tenir compte de ces différences car beaucoup d'élèves mettent en jeu les stratégies cognitives de l'expression orale à l'écrit ; or il est évident que c'est « la pratique écrite de l'écrit qui donne du sens à la preuve donnée par la démonstration ». « L'écriture ne permet pas seulement une explicitation (ce que permet aussi la parole), elle conduit à une désubjectivité de la pensée, en ce sens qu'au cours de l'écriture c'est le *déjà écrit* qui devient la référence à la place du vécu (celui-ci porte le vouloir-dire) et à la place de la mémoire de travail (celle-ci est censée garder à l'esprit ce qui a déjà été effectué mentalement ou exprimé vocalement). Le *déjà écrit* libère aussi de la nécessité d'une

---

[11] Nicolas Rouche, *La géométrie naturelle*, Le dessin géométrique, de la main à l'ordinateur, Actes du colloque de géométrie, 1994, pages 183-187.

[12] Raymond Duval, *Généalogie cognitive des textes*, Produire et lire des textes de démonstration, Éditions Ellipses, Paris, 2001.

non-interruption dans l’activité d’expression, non-interruption nécessaire à l’expression orale pour laquelle le moindre arrêt provoque des *où en étais-je ?*, *qu’est-ce que je disais ?…* »
« L’écriture ne se défend pas elle-même » a dit Platon !
Un des buts du collège est donc de favoriser le passage « d’une pratique orale de l’écrit » à « une pratique écrite de l’écrit », car c’est seulement arrivé à ce stade que l’on peut percevoir les inférences mises en jeu dans le texte de démonstration.

2.4. Les mots d’articulation

Concernant ces mots de liaison, les avis des mathématiciens sont là encore très divers. En voici quelques exemples.
Isabelle Beck[13] s'est intéressée à une approche linguistique des textes de raisonnement. Une caractéristique linguistique remarquable est la présence fréquente en début de phrase d'un connecteur, en particulier le **« DONC »** que l'on retrouve presque une fois sur deux, dans les cinq textes de démonstration qu'elle a choisis dans des manuels de Quatrième.
Elle précise que les connecteurs utilisés sont pratiquement semblables dans les textes d'argumentation : ce sont des connecteurs qui marquent des relations logiques. « Mais le fonctionnement d'un même connecteur peut ne pas être le même dans les deux types de textes ». Elle étudie en particulier le MAIS et le DONC. « Le DONC introduit une conséquence nécessaire » qui, dans un texte de démonstration, est obtenue grâce à des théorèmes, des définitions..., « un système de normes extérieur au texte », alors que, dans un texte d’argumentation, l’interlocuteur est parfois amené à construire un contexte qui justifie le caractère nécessaire de la conclusion. « C'est pourquoi, le recours systématique à DONC en géométrie peut être dangereux pour celui qui n'a pas compris le fonctionnement de la démonstration. S'il superpose la valeur argumentative usuelle de DONC à sa valeur organisationnelle, il aura tendance à avoir recours à ce qui devient pour le professeur de mathématiques un DONC magique, qui fait apparaître des théorèmes inexistants pour les besoins de la cause ».
Danièle Fougères[14], professeur de Français en collège, indique que « des études sur les populations d’élèves de l’âge du collège ont montré que, non seulement ces articulations sont peu utilisées dans leurs propres productions écrites, mais qu’elles ne sont pas perçues comme pertinentes dans la lecture de textes argumentés. On pourrait donc penser que la présence de ces connecteurs logiques, dans certains types de textes mathématiques, n'est que faiblement prise en compte. Il s’en suivrait alors une mauvaise lecture de la dynamique argumentative. »
Notons pour clore ce paragraphe une particularité linguistique régionale : dans le pays Gallo (région est de Rennes) le « dont » et le « donc » sont bien souvent confondus !…
Marie Agnès Egret et Raymond Duval[15] analysent une expérience faite auprès de 27 élèves de Quatrième. Le travail des élèves est centré sur l'idée de représenter les « solutions de problèmes » sous forme de graphes composés de propositions reliées entre elles par des flèches, dans le but de rédiger une démonstration. Une certaine liberté est laissée aux élèves dans cette représentation ; l’enseignante n’a jamais donné de corrigé ou de modèle.
L'expérience s’est déroulée pendant dix séances, deux fois par semaine, au moment de l’apprentissage de la démonstration (théorème des milieux, parallélogramme...). Il est intéressant de constater après ce travail la variété des attitudes propositionnelles pour exprimer le statut opératoire des propositions : « on sait que...; je suis sûre que...; », ainsi que des commentaires du genre : « maintenant je travaille dans le triangle.. » ou « mais il nous

---

[13] Isabelle Beck, op. cit.

[14] Danièle Fougères, *Inventaire des difficultés de lecture*, Cahiers pédagogiques n° 316, 1993.

[15] Marie-Agnès Egret et Raymond Duval, *Comment une classe de Quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration*, Annales de didactique et de sciences cognitives n°2, IREM de Strasbourg, 1989.

manque un autre milieu... ». Ces expressions reflètent bien une prise de conscience de ce qu'est une démarche de démonstration.

2.5. L'UTILISATION DU « SOIT » : QUANTIFICATEUR OU NON.

On rencontre dans les démonstrations une utilisation du mot « soit » spécifique des mathématiques : il s'agit de faire une généralisation en commençant par une expression du type : « Soit a vérifiant telle propriété » (en sous-entendant que a est quelconque donc « pour tout a »). Ce a est quelconque au départ mais, dans la démonstration, il sera considéré comme fixé. La propriété étant vraie pour celui-là, on en déduira qu'elle est toujours vraie. Ce type de raisonnement n'est peut être pas facile à admettre après que l'on ait dit aux élèves qu'une propriété vérifiée dans un ou quelques cas particuliers ne peut pas être considérée comme toujours vraie. Au collège ce mot est remplacé par des mots mieux compris comme « je prends », mais le mot « soit » devra être maîtrisé au lycée !
Le mot « Soit » en mathématiques peut être utilisé dans d'autres sens, ce qui ne simplifie pas les choses pour les élèves. En voici quelques exemples :

- Dans les textes de problèmes, on peut lire : « Soit ABC un triangle.... » ; ceci ne constitue pas le début de la démonstration. Il est certain que les propriétés démontrées seront vraies pour tout triangle, mais, dans ce cas on ne s'en préoccupe pas.
- On peut trouver aussi : « Soit H le pied de la hauteur issue de A » ; il a ici un statut de notation d'un élément déterminé dont on connaît l'existence.
- Le mot « soit » peut désigner la conjonction de coordination, comme dans « La droite D coupe soit le côté [AC], soit le côté [AB]. »

2.6. LES EXPRESSIONS COMPLEXES

Notons enfin les difficultés des élèves de Sixième et parfois même en Quatrième devant certaines constructions de phrases comme : « *construire la perpendiculaire à la droite (d) en A…* »[16].

2.7. LE ROLE DE LA MISE EN PAGE

La mise en page peut aider à la clarté du raisonnement, voir l'exemple ci-dessous :

dans le triangle ABM on sait :
C' est le milieu de [AB]
G est le milieu de [AM]
D'après le théorème : « dans un triangle, une droite qui passe par les milieux de deux côtés est parallèle au support du troisième côté ».
La droite (C'G) est parallèle à (BM).

La conclusion du pas se repère non pas par une marque linguistique mais par sa position.
La structure de l'enchaînement n'est pas toujours linéaire même si elle y paraît dans la présentation. Une mise en vis-à-vis dans la page de deux énoncés indépendants peut permettre de mieux comprendre une structure en arbre.
Pour Danièle Fougères[17], les retours à la ligne rendent le texte plus clair pour un lecteur averti mais peut-être pas pour un élève qui risque de les prendre pour un simple procédé d'énumération : « *il n'est pas certain qu'il sache réellement lire l'organisation logique que les alinéas mettent en évidence.* » Il semble nécessaire, cependant, de sensibiliser les élèves à

---

[16] Colette Laborde, *Occore apprendere a leggere i scrivere in mathematica ?*, Séminaire international de didactique des mathématiques, Sulmona, 1995.

[17] Danièle Fougères, *Inventaire des difficultés de lecture en mathématiques*, Cahiers Pédagogiques N°316, 1993.

une mise en page claire d'une démonstration, soit au cours d'une correction dictée en classe, soit lors d'un compte-rendu de démonstration.
Des implicites ou des ambiguïtés dans la rédaction peuvent créer d'importantes erreurs de compréhension chez les élèves : il faut donc être particulièrement vigilants quant aux démonstrations faites en classe ou dans les corrections de devoirs.

2.8. DES TEXTES REVELATEURS DES DIFFICULTES DES ELEVES

1°) On rencontre fréquemment ceci dans les copies : « *je sais que M est le symétrique de A par rapport à G donc AG = GM, donc G est le milieu de [AM] ;* le problème est le même avec les vecteurs. Comment expliquer cette erreur ? Robert Noirfalise suppose que l'objet « symétrique d'un point par rapport à un autre » est, pour les élèves, doté de diverses propriétés n'ayant pas de statut particulier les unes par rapport aux autres et qu'une définition présente, pour eux, un caractère particulier[18].
Une étude sur ce sujet serait peut-être à poursuivre afin de trouver des moyens de lutter contre ce type d'erreur : mais peut être n'est-ce pas un problème important ?
2°) *Changement de nom pour une droite* : faut-il le justifier ? La variation constatée dans différentes rédactions peut s'expliquer par le fait qu'en géométrie on travaille avec une figure sur laquelle des propositions sont plus ou moins lues. « La frontière entre ce qu'il suffit de lire sur la figure et ce qu'il faut déduire n'est pas tracée nettement et certains la repoussent plus loin que d'autres » (Noirfalise) (penser au travail d'axiomatisation par Hilbert en géométrie). Dans ce cas précis des points alignés, la justification en toute rigueur est parfois difficile (vu les règles d'incidence sur point et droite) et entraîne des lourdeurs ; mais la question de la vérité de l'affirmation doit cependant être soulevée à l'oral, au cours de la correction ; ceci évite peut-être des fautes de raisonnement lorsque les points ne sont pas alignés. *Dans le triangle ABC, je sais que la droite (D) passe par I le milieu de [AC] et est parallèle au support du côté [BC] ; elle coupe donc le troisième côté [AB] en son milieu ; donc K est le milieu de [AB].* Encore faut-il être sûr que K soit bien défini comme point d'intersection des droites (D) et (AB) !
D'autre part des divergences apparaissent suivant les enseignants : pour l'exemple cité précédemment en 1°), les enseignants de lycée considèrent qu'il n'y a rien à démontrer : *« Par construction, G est le milieu de [AM] ».* Les enseignants de collège estiment pour leur part qu'il y a là un pas déductif.
Les exigences d'un même professeur peuvent parfois être différentes suivant le niveau des élèves ; il arrive en effet que, lors de la correction de la copie d'un bon élève, une précision n'ait pas été donnée par celui-ci ; le professeur peut estimer qu'elle a été pensée mais jugée superflue alors que pour un élève plus moyen, le professeur aura plus de doute sur la correction du raisonnement.

3. LANGUE NATURELLE – LANGUE SYMBOLIQUE

3.1. FORMULATIONS DES PROPRIETES

Les propriétés peuvent être formulées dans deux modes d'expression, **langue naturelle et langue symbolique**. Il semble que « cette double expression dans deux modes de formulations différentes, d'une part met en valeur la propriété ou règle à retenir, d'autre part permet un contrôle de l'interprétation d'une formulation par la présence de l'autre.

[18] Robert Noirfalise, *Étude sur le maniement d'énoncés dans une démonstration*, Petit X n°46, IREM de Grenoble, 1998.

Évidemment cela suppose que les élèves reconnaissent bien que les deux formulations renvoient au même référent. »[19]
Une étude menée, en 1990, dans un collège de Rennes dans deux classes de Quatrième a eu pour but d'évaluer l'aide que peut apporter le logiciel D.E.F.I. aux élèves dans l'apprentissage de la démonstration[20]. Cette aide s'effectue dans la phase heuristique, puis dans la phase de démonstration, le contrat étant de rédiger la démonstration du problème traité. Une analyse détaillée des productions des élèves permet de montrer que la maîtrise linguistique est certes une condition nécessaire à la « bonne démonstration », mais qu'elle n'est pas suffisante.
« Celle-ci réside plutôt du côté du traitement correct des informations et prend sa source dans l'exploration de la figure. Autrement dit, un discours bien coordonné par les mots-clés n'est qu'un indice de rationalité du discours, mais également l'usage correct des faits n'accompagne pas nécessairement l'emploi adopté des mots-clés. Ces derniers semblent être les leviers qui permettent de passer d'un stade à un autre. Par contre, ils s'accompagnent du jugement que l'on porte sur une démonstration : raisonnement correct (et non correct). »

3.2. Les quantificateurs

L'utilisation des quantificateurs se situe à deux niveaux : au niveau d'une proposition et au niveau de son utilisation dans une démonstration. Le paragraphe suivant traite plus particulièrement le premier point de vue, du collège à l'enseignement supérieur.
Au collège, les quantificateurs sont présents dans le langage courant ; on les repère par des expressions : *chaque fois, n'importe quel, il existe* ; par des déterminants : *tous, quelques* ; par des adjectifs : *quelconque* ; par des adverbes : *toujours*, *parfois*, *jamais*.
Depuis quelques années, dans l'enseignement secondaire, les programmes déconseillent explicitement l'utilisation formelle des quantificateurs. Cette interdiction est-elle pertinente ? D'ailleurs les nouveaux programmes de collège parlent d'exemples et de contre-exemples, suggérant une attitude moins tranchée. Certains enseignants continuent encore à les utiliser.
« Au delà de ces phénomènes de mode, il faut bien comprendre que ces quantificateurs sont présents, même s'ils sont souvent sous-entendus. Par exemple, la plupart des énoncés de la forme *si... alors* sous-entendent un *quel que soit*. Il est nécessaire que l'élève repère ce quantificateur pour appréhender le théorème réciproque, la contraposée et la négation. Pour cette dernière en particulier, un *il existe* apparaît. Il permet de comprendre pourquoi il suffit d'un contre-exemple pour prouver la négation. »[21]
Il est donc nécessaire, au moins de temps en temps, de présenter des démonstrations où les quantificateurs ont un rôle à jouer et des énoncés comportant des quantificateurs explicites exprimés en français.

4. Des demonstrations discutees

Les problèmes peuvent être classés en deux catégories :
- ceux où la conclusion est connue (« Démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme » ou « Démontrer qu'une équation a une seule solution »...)

---

[19] Colette Laborde, *Lecture de textes mathématiques par des élèves (14-15 ans) : une expérimentation*, Petit X n°28, IREM de Grenoble, 1992.

[20] Sado Ag Almouloud, *Aide logicielle à la résolution de problèmes avec preuve*, Recherche en didactique des mathématiques vol. 12/2-3, La pensée sauvage, 1992.

[21] Jean Houdebine, *La démonstration, écrire des mathématiques au collège et au lycée*, Hachette Éducation, 1998.

– et ceux où la conclusion n'est pas connue (« Résoudre une équation » ; « Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? »...).

Nous allons nous intéresser plus particulièrement à ceux du premier type.
Lorsque la conclusion est connue, en plus de la méthode classique consistant à partir des hypothèses et à arriver à la conclusion par implications successives, on dispose des deux méthodes de démonstration importantes suivantes :

– on peut partir de la conclusion (« chaînage arrière »)

– on peut raisonner par l'absurde.

4.1. LES DEMONSTRATIONS EN DESORDRE

Beaucoup d'enseignants hésitent à présenter des démonstrations qui ne se présentent pas comme allant des hypothèses vers la conclusion.
Isabelle Beck[22] précise que « cette rédaction *à rebours* du raisonnement est parfois présente dans les manuels scolaires mais caractérise alors les textes de recherche de la démonstration et les oppose aux textes de démonstration. Mais cette rédaction comporte une part importante d'explicitation de la démarche de la démonstration, justement ce que, dans les autres textes de démonstration, on doit comprendre en s'appuyant en particulier sur l'ordre des phrases ».
Antibi[23] propose des textes de démonstration qui « partent de la conclusion », à des enseignants de lycée et à des étudiants. Ceux-ci considèrent souvent ces démonstrations comme « non élégantes » ou « du bidouillage ». Elles sont même souvent déconseillées, voire interdites par certains enseignants ; on peut rédiger ainsi quand on cherche, pas quand on rédige la démonstration ! Cette stricte discipline n'incite pas les élèves à partir de la conclusion pour conduire la recherche d'un problème et est la source de certains blocages.
Antibi note encore qu'il existe « une tradition selon laquelle un enseignement de mathématiques doit être quelque chose de propre, et doit donner l'impression d'un enchaînement parfait de propriétés qui se déduisent les unes des autres. Or ceci ne traduit pas du tout la réalité de l'activité mathématique : quand on cherche vraiment, il n'en est pas ainsi ; les étapes ne sont pas aussi clairement ordonnées. » Depuis 1988 les choses ont évolué : par exemple l'apprentissage de méthodes de résolution est plus présent dans les manuels (« boîte à outils », « savoir-faire ») ; mais il n'est pas sûr que les comportements des enseignants vis-à-vis de la rédaction elle-même se soient vraiment modifiés.
Une difficulté voisine se présente aussi en algèbre quand il s'agit de démontrer une égalité $A = B$. Ici les élèves partent assez naturellement de cette égalité et les incitations des enseignants à partir d'un membre pour essayer d'aboutir à l'autre restent trop souvent lettre morte (notons que pour montrer $A = B$ on peut tout aussi bien leur proposer de partir tour à tour de chacun des membres pour aboutir à $A = C$ et $B = C$). Si l'enseignement laissait toute sa place aux démonstrations partant de la conclusion, on pourrait ici aussi accepter que les élèves produisent des textes de démonstration qui restent proches de leur démarche, à condition que ces textes indiquent explicitement le statut des propositions ; par exemple : « Pour démontrer $A = B$, je vais essayer de démontrer que $A – B = 0$ ».

4.2. CONTRAPOSEE OU RAISONNEMENT PAR L'ABSURDE

Si on ne peut pas partir de l'hypothèse (H) pour arriver à la conclusion ©, on peut parfois essayer une démonstration par l'absurde : on suppose (H) et (non ©) et on arrive, après plusieurs implications, à une contradiction. Cette manière de rédiger des démonstrations est

---

[22] Isabelle Beck, op. cit.

[23] André Antibi, *Étude sur l'enseignement de méthodes de démonstration*, Thèse, Université de Toulouse, 1988.

parfois rejetée par les enseignants de collège, alors qu'elle ne pose pas de problème particulier aux enseignants de lycée.
D'un point de vue théorique, la démonstration par l'absurde ouvre plus de possibilités puisqu'elle enrichit les hypothèses avec lesquelles on peut travailler. Du point de vue didactique la situation est moins claire. Cependant on peut affirmer d'une part que les élèves n'ont pas de difficultés particulières à comprendre de telles démonstrations, et d'autre part qu'il est bon de les initier tôt à celles-ci puisque, de toutes façons, ils en rencontreront au lycée.

4.3.« Résoudre une equation, c'est encore demontrer »

Les démonstrations n'existent pas seulement en géométrie. « Résoudre une équation, c'est encore démontrer »[24]. Pour les élèves, résoudre une équation, c'est dérouler un calcul très codifié, qui doit se terminer par x =... ou S= {...}, la technique prenant le pas sur le sens. Des discordances importantes existent chez les enseignants et selon les types d'équations. En effet, alors qu'un élève a résolu une équation en raisonnant en termes d'équations équivalentes (ayant mêmes solutions), il arrive que son professeur exige de lui une vérification de la solution. Cette vérification n'a pas de nécessité mathématique et elle ne joue donc que le rôle d'un contrôle ; alors pourquoi cette obligation qui n'existe pas pour d'autres problèmes ? une autre solution consisterait à résoudre par implication ; dans ce cas la vérification, qui serait la réciproque, aurait une nécessité. Cette pratique est-elle courante en collège ?
La confusion entre résolution par équations équivalentes et résolution par implications est encore plus grande pour les équations du type A x B = 0, puisque l'énoncé « un produit est nul, si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul » est théoriquement proscrit dans les programmes.
Au lycée, le symbole ⇔ est parfois utilisé, mais il n'a pas toujours son sens d'équivalence logique. Il faudrait faire le lien avec des énoncés du type « Si... alors... » ou « ... si et seulement si... », vus dans d'autres domaines, géométrique en particulier.
Une autre difficulté, pour les élèves, réside dans le fait que « prouver qu'une équation n'a pas de solution », ce n'est pas « l'avoir résolue ». « Dans le quotidien, si un problème n'a pas de solution, il n'est pas résolu ».
Pour Michèle Gandit et Marie-Claire Demongeot, il faut considérer la résolution des équations comme une démonstration, en utilisant le vocabulaire adapté, en rappelant les théorèmes utilisés et en donnant la conclusion dans le langage ordinaire, par exemple : « l'équation a deux solutions qui sont 2 et –3 », plutôt que de terminer par « x = 2 ou x = –3 », qui sont encore des équations. Pour certains élèves, le mot « ou » de cette expression est d'ailleurs interprété comme la nécessité de choisir entre les deux solutions.

[24] Michèle Gandit et Marie-Claire Demongeot, *Le vrai et le faux en mathématiques*, IREM de Grenoble, 1996.