LE ROLE DE LA FIGURE

On ne saurait réduire l'utilisation des démonstrations à la seule géométrie : que ce soit en analyse, en probabilités ou dans d'autres domaines, les élèves auront à produire des démonstrations et souvent, ils devront avoir recours à un schéma, une figure, une représentation pour résoudre le problème et rédiger leur démonstration.
Mais dans la mesure où l'apprentissage de la démonstration est basé essentiellement sur la géométrie, nous limiterons à ce domaine l'étude des interactions entre la figure et la démonstration.
Ce sujet a été étudié à plusieurs reprises et de façon approfondie[1]. Nous ne pouvons ici présenter tous les résultats de ces études, mais seulement quelques éléments :

- – Quelle utilisation de la figure attend-on de l'élève aux différents stades de sa scolarité ?
- – Quels sont les apprentissages sous-jacents ?
- – Quelles conséquences pour le professeur dans l'organisation de son cours ?

1. QU'EST-CE QU'UNE FIGURE GEOMETRIQUE ?

Dans les articles abordant ce sujet, peu d'auteurs se risquent à donner une définition de l'expression « figure géométrique » mais il est beaucoup question de la relation entre figure, dessin, schéma, représentation…
C'est bien ce sujet que Platon évoquait déjà dans La République (Livre IV) :
« … tu sais aussi qu'ils se servent de figures visibles et qu'ils raisonnent sur ces figures, quoique ce ne soit point à elles qu'ils pensent, mais à d'autres auxquelles celles-ci ressemblent. Par exemple, c'est du carré en soi, de la diagonale en soi qu'ils raisonnent, et non de la diagonale telle qu'ils la tracent, et il faut en dire autant de toutes les autres figures. »
Cette phrase contient deux points essentiels : le fait qu'une figure sert à raisonner, et que le tracé visible n'est que le représentant d'un objet abstrait.
On retrouve ces idées dans les textes actuels, avec cependant des nuances. Tous s'accordent pour dire qu'un dessin géométrique n'est pas une figure, bien que l'expression « tracer une figure » entretienne l'ambiguïté. Pour certains, le dessin devient figure dès qu'il est complété

---

[1] Par exemple :

Colette Laborde, *La multiplicité des contrats dans l'usage de la figure*, Bulletin d'information de l'IREM de Rennes, 1997,

Gilbert Arsac, *Les limites d'un enseignement déductif de la géométrie*, Petit X n°47, IREM de Grenoble, 1998,

Raymond Duval, *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée*, Annales de didactique et de sciences cognitives, vol. 5, 1993, pages 37-65.

Évelyne Barbin, *Le rôle de la démonstration dans l'étude des figures géométriques*, InterIREM, 1994.

par l'énoncé de ses propriétés. Parzysz[2] pense que « la figure géométrique est l'objet géométrique décrit par le texte qui la définit, une idée, une création de l'esprit tandis que le dessin en est une représentation ».
Laborde et Capponi[3] précisent cette idée en définissant la figure géométrique comme « relation entre un objet géométrique et ses représentations possibles ».
Dans tous les cas, il y a bien, d'une part un objet idéal, dont on peut énoncer des propriétés et sur lequel porte le raisonnement, d'autre part des représentations de cet objet. Il semble que dans l'usage courant, le même mot, par exemple *carré*, serve à désigner à la fois l'objet idéal et les représentations de cet objet.
Comment un élève, au cours de sa scolarité, prend-il conscience de ce double statut de la figure géométrique ? Cette prise de conscience est-elle nécessaire ?

2. LA FIGURE EST-ELLE D'ABORD UN DESSIN ?

Les propriétés géométriques d'un objet géométrique se traduisent par des propriétés spatiales de sa représentation et c'est d'abord par une appréhension perceptive de cette représentation que l'élève comprend et assimile une notion.
Ainsi le cercle est d'abord pour lui une « forme particulière », bien avant de pouvoir en donner une définition. De même, en pliant une feuille de papier en quatre, il obtient une équerre et, s'il déplie la feuille, il voit des droites perpendiculaires. En utilisant cette équerre, il peut tracer une perpendiculaire, vérifier l'orthogonalité.
De nombreuses activités de dessin ont pour but de faire acquérir la maîtrise des instruments de mesure et de tracé et de découvrir les propriétés des figures. Mais certaines tâches, en permettant d'atteindre ces objectifs, peuvent aussi établir chez quelques élèves des habitudes qui vont bloquer les apprentissages ultérieurs.
On trouve par exemple des tâches de reproduction d'un dessin donné, à l'identique ou en plus grand, (avec parfois des restrictions sur le choix des instruments à utiliser). Ce type de tâche pose le problème des informations qu'il est licite d'extraire d'une figure : certaines informations peuvent être codées : longueurs égales, angles droits ; d'autres sont à « deviner » : parallélisme, appartenance d'un point à une droite, droites concourantes. La lecture de mesures sur le dessin est autorisée, souvent sans même parler de valeur approchée[4].
Commencer avec les élèves une réflexion sur « exact et approché », sur « ce qui est certain et ce qui ne l'est pas », sur les différentes lectures possibles d'une figure va contribuer à leur faire considérer le dessin comme une représentation d'un objet abstrait. C'est aussi un moyen de leur faire comprendre le changement de contrat lorsqu'ils aborderont la démonstration.
Il en est de même si on leur demande de tracer plusieurs figures correspondant à un même énoncé (tout en contribuant à renforcer la maîtrise des instruments). De plus, l'observation des différents dessins obtenus peut être l'occasion d'émettre des conjectures.
Certaines peuvent être justifiées par l'expérience sensible des élèves, c'est le cas, par exemple, pour le parallélisme de deux droites perpendiculaires à une même troisième. De même, lorsqu'on demande à des élèves de tracer les symétriques par rapport à une droite de trois points alignés, il est probable que les points obtenus ne soient pas alignés, et un débat

---

[2] Bernard Parzysz, *Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au lycée. Contribution à l'étude de la relation voir-savoir*, Thèse, Université de Paris VII, 1989.

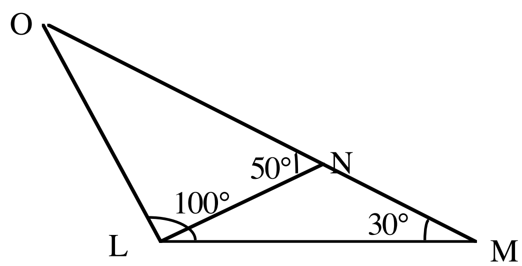
[3] Colette Laborde et Bernard Capponi, *Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique*, Recherche en didactique des mathématiques vol. 14/1-2, La pensée sauvage, 1994.

[4] Colette Laborde, *La multiplicité des contrats dans l'usage de la figure*, Bulletin d'information de l'IREM de Rennes, 1997.

peut s'installer dans la classe à ce sujet. Mais la compréhension de la symétrie orthogonale (comme pliage) doit les convaincre de la nécessité de l'alignement des images et ils peuvent alors produire un énoncé.
Ainsi, à travers la manipulation et le dessin, les élèves vont donner du sens aux notions telles que orthogonalité et symétrie, acquérir la maîtrise des instruments de tracé et de mesure, repérer des propriétés sur les dessins réalisés.

3. DES PROPRIETES SPATIALES AUX PROPRIETES GEOMETRIQUES

Pour que les problèmes proposés aux élèves les amènent à prendre en compte les propriétés géométriques, il faut que la résolution du problème soit impossible en utilisant les méthodes habituelles liées au dessin, et qu'elle impose de recourir à une interprétation du dessin en termes de propriétés géométriques.
Laborde et Capponi[5], analysant quelques exercices couramment proposés en début de collège, étudient comment les tâches à réaliser permettent ou non d'atteindre cet objectif.
Un premier exercice consiste à reproduire un dessin donné, à l'identique, en utilisant seulement la règle et le compas. Une indication de mesures d'angles sur le dessin à reproduire laisse penser que l'auteur veut que les élèves reconnaissent et utilisent les propriétés du triangle rectangle isocèle. Mais puisque la reproduction doit se faire à l'identique, les élèves peuvent se contenter de relever les longueurs des différents segments et, à l'aide du compas, obtenir les points successifs. Certains élèves, bien sûr, auront compris le contrat implicite et raisonné sur les angles, mais pour les autres, l'objectif n'est pas atteint. « Les situations de reproduction à l'identique de dessins ne nécessitent pas un détour par la géométrie et ce sont des choix de contraintes qui peuvent rendre ce dernier plus intéressant. La reproduction dans une autre taille peut être un moyen de permettre que le détour par la géométrie soit plus économique qu'une autre solution ou même indispensable ».
Pour prendre en compte les propriétés géométriques, C. Frelet[6] demande aux élèves « de réaliser une construction pour laquelle les informations données sont insuffisantes et où seul un raisonnement faisant intervenir des propriétés générales permet d'en obtenir des nouvelles, indispensables pour la réalisation de la tâche ».



L'utilisation d'un logiciel de dessin géométrique (comme Cabri-géomètre) peut aider les élèves à comprendre le rôle des propriétés géométriques dans la définition d'un objet. Un tel logiciel permet de construire soit des éléments de base (points, droites….) soit des objets définis par des relations aux éléments déjà tracés. Pour obtenir, à partir de deux points A et B, un parallélogramme ABCD, un élève peut tracer « au jugé », des droites de base, c'est-à-dire qu'il se fie à sa perception visuelle : « ça à l'air d'un parallélogramme ». Bien qu'il n'ait nullement enregistré que les droites tracées sont parallèles, il pense avoir réalisé la tâche demandée. Si alors, on lui demande de déplacer le point A, le parallélogramme se déforme en un quadrilatère dont les côtés ne sont plus parallèles, ce qui invalide sa construction. Il peut

[5] Colette Laborde et Bernard Capponi, op. cit.

[6] Claude Frelet, *Une preuve pour construire en Cinquième*, Repères IREM n°12, Topiques Éditions, 1993.

alors mieux comprendre la nécessité d'utiliser les propriétés de la figure pour définir les éléments à construire.
Ceci est particulièrement flagrant pour certaines constructions comme celle d'une tangente à un cercle passant par un point donné. En papier/crayon, les élèves ont tendance à procéder empiriquement en faisant tourner la règle autour du point, et il est très difficile de disqualifier leur procédé : pour eux, la droite tracée respecte bien la caractéristique d'une tangente. Avec un logiciel comme Cabri-géomètre, un tel procédé au jugé sera immédiatement invalidé par un déplacement, mais alors, cette sanction ne sera pas perçue comme une contrainte arbitraire fixée par l'enseignant ; « le dispositif oblige à la distinction entre tracé et procédé de tracé . D'autre part, l'enseignant est absent du processus de communication au dispositif ».
De plus, la possibilité de modifier le dessin en déplaçant les points de base a le même effet que la construction en papier/crayon de plusieurs figures correspondant au même énoncé : elle met en évidence les invariants et est ainsi source de conjectures et de questionnements.

4. STATUT DE LA FIGURE, STATUT DES ENONCES

En parallèle avec la compréhension de la figure comme « objet idéal possédant des propriétés », l'élève doit comprendre que « certaines propriétés en impliquent d'autres », c'est-à-dire comprendre ce qu'est un énoncé de théorème et comment l'utiliser.
Cette acquisition est-elle indépendante du statut accordé par l'élève à la figure ? C'est ce qu'a étudié R. Noirfalise[7], en analysant un manuel de Sixième.
Il met en évidence que de nombreux énoncés sont obtenus suivant le schéma :

construction ——> figure ——> lecture ——> énoncé.

Il étudie alors les comportements possibles pour les élèves et analyse le statut qu'ils peuvent donner aux énoncés obtenus.
Tout d'abord, la lecture de figure n'est pas une activité « naturelle » puisqu'elle nécessite un décodage, c'est-à-dire un choix d'informations pertinentes, ce qui sous-entend apprentissage, habitudes culturelles.
Ensuite, « la lecture d'une figure n'implique pas un ordre de saisie déterminé des propriétés : la prise d'informations peut faire émerger des propriétés dans des ordres divers ». Ainsi , devant la figure de deux droites perpendiculaires à une troisième, un élève chargé de décrire la figure y voit un angle droit, un autre angle droit et deux droites parallèles. « Rien dans sa production ne permet de dire qu'il coordonne les trois propriétés. Or *cette coordination est nécessaire pour que s'établisse le résultat visé par le manuel par la lecture de cette figure ».*
C'est sans doute le rôle que les auteurs du manuel attribuent aux constructions demandées à l'élève : l'amener à établir une distinction entre les propriétés lues sur la figure : celles qui sont données au départ, et celles qu'on constate après construction. De cette façon, l'élève établit des résultats empiriques, expérimentaux , qu'il peut formuler « lorsqu'on trace …, on obtient… »
Le but recherché est bien sûr que tous les élèves soient convaincus du caractère de nécessité et d'universalité de ce résultat (et soient ainsi capables d'aborder une démarche de démonstration). Mais est-ce bien le cas et quel statut vont-ils donner à l'énoncé du résultat obtenu ?
Noirfalise met en évidence différentes « positions » d'élèves :
Pour certains (position P1), le contrat était de lire des propriétés sur une figure ; le contrat est rempli : « la figure assure à elle seule grâce aux gestes perceptifs, de la présence ou de

---

[7] Robert Noirfalise, *Contribution à l'étude didactique de la démonstration*, Recherche en didactique des mathématiques vol. 13/3, La pensée sauvage, 1993.

l'absence de certaines propriétés », mais l'organisation de ces propriétés n'est pas perçue. L'étape essentielle « certaines propriétés en impliquent d'autres » n'est pas franchie et on peut penser que l'énoncé obtenu ne va pas être pris en compte par ce type d'élèves et ne sera pas utilisable pour justifier ou anticiper un résultat.
Pour d'autres (position P2), il y a eu production d'un objet nouveau : l'énoncé du résultat. Les commentaires de ces élèves montrent que ce résultat est reconnu comme nécessaire, par des mots comme « forcément », « c'est obligé », et comme universel et utilisable par la suite : « comme on l'a dit tout à l'heure… ». Cet énoncé prend « statut de loi » et devient ainsi un objet de « la mémoire officielle à laquelle on pourra faire référence ultérieurement ».
Dans cette position P2, la figure n'est plus seulement figure particulière, support de l'observation et de l'expérimentation mais elle représente bien l'objet géométrique pour lequel la propriété est établie.
Une position intermédiaire (position contractuelle Pc) est celle de l'élève qui, sachant qu'il est là pour apprendre du « nouveau », voit la nouveauté dans l'apprentissage de constructions nouvelles, mais la figure reste l'objet tracé sur la feuille, dont on peut lire les propriétés .
Comme pour la position P1, l'énoncé obtenu ne prend pas pour l'élève un statut particulier.
On voit donc que le choix des activités destinées à faire produire des énoncés est particulièrement important.
Pour qu'un énoncé soit utilisable comme preuve par un élève, il faut qu'il ait pris du sens. Mais il est toujours difficile de s'assurer que l'objectif est atteint. Ainsi E. Barbin[8], à propos de la somme des angles d'un triangle se pose la question de l'efficacité d'une activité consistant à faire mesurer les angles de nombreux triangles et estime plus signifiant de proposer une activité autour de pavages.

5. LE CHANGEMENT DE CONTRAT DIDACTIQUE

Il est clair que la capacité à percevoir les énoncés obtenus comme de nouveaux objets mathématiques est indispensable pour aborder la démonstration et que cette capacité est indissociable de la perception de la figure comme objet idéal. Le passage à cette position P2 , nous dit Noirfalise « constitue une révolution épistémologique » , le passage du « monde du sensible » à « celui de l'intelligible » et ce passage n'est certes pas assuré automatiquement par la construction de figures et la lecture de leurs propriétés.
Le travail du professeur est donc d'organiser le travail de la classe de façon à amener les élèves à « changer de monde » : la certitude par le « raisonnement » doit l'emporter sur la certitude par l'observation. C'est un nouveau contrat didactique qui se met en place, mais les élèves qui n'ont pas franchi le pas ne peuvent intégrer ce changement de contrat : la démonstration n'a pas de sens pour eux.
Pour les autres, la démonstration devient accessible ; « le prix à payer sera d'avoir à sa disposition des résultats mis en mémoire mais aussi que ces résultats soient exprimés d'une façon qu'ils permettent le jeu de déduction de faits à partir d'autres ». C'est dire que l'élève doit travailler dans deux directions : d'une part, découvrir et assimiler les relations entre les objets géométriques et les utiliser pour résoudre les problèmes, d'autre part, formuler ces relations par des énoncés et apprendre à les utiliser pour démontrer.
La compréhension du rôle des énoncés ne suffit pas toutefois à savoir démontrer et il reste un travail important pour apprendre à écrire une démonstration.

---

[8] Évelyne Barbin, *Quelles conceptions épistémologiques de la démonstration, pour quels apprentissages ?*, Repères IREM n°12, Topiques Éditions, 1993.

6. MEMORISER LE DESSIN, LA FIGURE, UN ENONCE

Chaque notion peut être associée à différentes représentations pour éviter le plus possible que seul le dessin prototypique soit reconnu (exemple classique : le carré considéré comme losange lorsque l'une de ses diagonales est horizontale).
En complétant un dessin par des éléments pertinents, on peut faciliter la mémorisation des propriétés de cette figure et des procédures de construction : par exemple, pour un triangle isocèle, on peut tracer un cercle ayant pour centre son sommet et placer des points sur ce cercle et dessiner ainsi un ou plusieurs triangles isocèles de même sommet ; ou tracer un segment puis deux arcs de cercle de même rayon, centrés aux extrémités de ce segment (Annie Berté[9] montre que la première procédure, pourtant très proche de la définition, est rarement utilisée par les élèves, même lorsqu'elle serait nécessaire).
Pour chaque théorème nouveau, la figure peut bien sûr jouer le rôle « d'aide à la découverte ». Un travail sur certaines figures va conduire à un nouvel énoncé, et ensuite l'une de ces figures sera mémorisée pour servir de support à l'énoncé produit.
Ainsi, pour aider à la compréhension et la mémorisation des théorèmes, plusieurs auteurs[10] proposent de les présenter sous forme d'une succession de schémas codés, la (les) figure(s) de départ montrant les prémisses du théorème, la figure d'arrivée présentant les conclusions. En particulier, ce type de schéma est parfois proposé dans le but d'aider les élèves à distinguer un théorème et sa réciproque. Ce travail n'est efficace que si la production de figures devient véritablement un mode d'écriture pour les élèves et non un jeu proche de la calligraphie. Ce n'est donc pas la présentation par l'enseignant de figures accompagnant un énoncé qui est l'essentiel, car l'assimilation des codes demande un apprentissage et certaines propriétés risquent de ne pas être vues. C'est la production par les élèves eux-mêmes de ce type de schéma en relation avec la production d'énoncés qui va permettre la compréhension et favoriser l'assimilation.

7. LA FIGURE DANS LA RESOLUTION DE PROBLEMES ET LA DEMONSTRATION

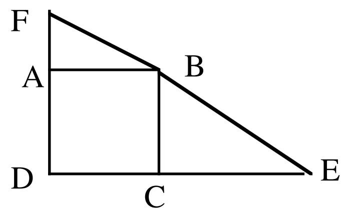
La démonstration est ici considérée comme un texte organisé suivant des règles connues pour présenter la solution d'un problème. La séparation entre les phases de résolution et de rédaction est évidemment artificielle mais permet de cerner les difficultés.
Lors de la résolution d'un problème, les difficultés dues à la figure se situent à deux niveaux : d'abord, la réalisation d'une figure « lisible » va conditionner en grande partie la réussite. D'où l'importance d'avoir effectué un apprentissage approfondi des figures de base et des procédés de construction, mais aussi d'avoir familiarisé les élèves à la réalisation de nombreuses figures à main levée.
Ensuite, la lecture de cette figure dépend du niveau de connaissances théoriques du lecteur. Ainsi, « les aspects perceptifs du dessin peuvent gêner ou au contraire favoriser la lecture géométrique par des élèves de collège, en attirant l'attention sur des éléments non pertinents pour cette lecture » alors que le lecteur expert saura au contraire « compléter » sa lecture en reconnaissant des sous-figures caractéristiques.
Une phase d'observation de la figure va ainsi permettre d'émettre des conjectures, de dégager des éléments de solution.

---

[9] Annie Berté, *Modules aquitains en seconde*, Repères IREM n°20, Topiques Éditions, 1995.

[10] Nicole Bellard et Martine Lewillion, *Analyse de productions d'élèves de quatrième*, Produire et lire des textes de démonstrations, Éditions Ellipses, Paris, 2001.

Mais la résolution d'un problème est un va-et-vient permanent entre les données et le but à atteindre ; celui-ci peut donner l'idée d'utiliser tel ou tel théorème. On va alors chercher sur la figure si ce théorème est applicable et donc on va devoir reconnaître la figure-clé du théorème. Cela suppose la mise en relief de certains éléments tandis que d'autres au contraire vont s'estomper. Il faut éventuellement prendre l'initiative de rajouter des éléments. Il est évident que la connaissance des figures-clés et la capacité à les évoquer mentalement va faciliter cette étape.
Comment la figure intervient-elle dans la démonstration ?
On trouve souvent dans les démonstrations d'élèves l'utilisation comme données de propriétés abusivement lues sur la figure et qu'ils auraient dû démontrer.
Certains professeurs proposent alors des activités pour entraîner les élèves à « douter » de ce qu'ils voient sur la figure notamment à propos de milieu on d'alignement. Par exemple Jean Pierre Muller[11] propose une figure pour laquelle un problème d'alignement se pose.



ABCD est un carré de 8 cm de côté. AF = 5 cm, CE = 13 cm. F, B et E sont-ils alignés ?

Ce type d'activité est sans doute utile pour les élèves qui ont déjà compris (ou entrevu) la notion de statut des propriétés ; cela va contribuer à renforcer chez eux le changement de statut de la figure.
Mais pour ceux que Noirfalise place « en position P1 », le bénéfice est plus hasardeux : ils seront peut-être convaincus que la figure est parfois trompeuse, mais sauront-ils davantage quelle utilisation en faire ?
De même, imposer d'écrire systématiquement la liste des données et des conclusions n'est pas suffisant pour faire comprendre le statut des propriétés.
Il est donc important de rechercher la cause de ce type d'erreurs chez les élèves avant de prévoir une activité de remédiation.
Il faut pourtant noter qu'il est courant et accepté de prendre certaines informations sur la figure sans justification. Un exemple simple : sur le segment [AB], placer les points E et F tels que AE = EF = FB. Tout le monde admettra qu'il y a une seule figure possible, mais ce n'est jamais démontré et pourtant ce n'est pas un théorème du cours. De même, pour calculer une mesure d'angle, on écrira cet angle comme somme d'angles de mesure connue, sans justifier cette décomposition. C'est la même chose pour un calcul d'aire. Ainsi, les propriétés d'ordre, de régionnement, dans certains cas d'intersection, peuvent être généralement admises directement de la constatation visuelle sur le dessin.

CONCLUSION

Personne n'aurait l'idée de remettre en cause l'utilisation de la figure pour apprendre la géométrie, mais on oublie parfois l'apprentissage que cette utilisation nécessite.
De même, en analyse, les représentations graphiques constituent un outil précieux pour assimiler de nombreuses notions, mais il demande un apprentissage auquel il faut accorder le temps et les moyens nécessaires.

---

[11] Jean-Pierre Muller, *Démonstration en géométrie en quatrième*, Repères IREM n°15, Topiques Éditions, 1994.